

POTENTIEL D'ÉQUILIBRE  
ET CAPACITÉ DES ENSEMBLES

Avec quelques applications  
à la théorie des fonctions

Par Otto Frostman

LUND 1935  
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

POTENTIEL D'ÉQUILIBRE  
ET  
CAPACITÉ DES ENSEMBLES

AVEC QUELQUES APPLICATIONS  
A LA THÉORIE DES FONCTIONS

---

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LUND ET PUBLIQUEMENT  
SOUTENUE LE 7 DÉCEMBRE 1935 DÈS 10 HEURES DU MATIN  
DANS LA SALLE 6 DE L'UNIVERSITÉ

PAR

**OTTO FROSTMAN**  
LICENCIÉ ÈS SCIENCES, LD.

---

LUND 1935  
IMPRIMERIE HÅKAN OHLSSON

## Table des matières.

Introduction .....	6
--------------------	---

### I. Distributions de masses et potentiels généralisés.

1. Fonctions additive d'ensemble .....	10
2. Ensemble régulier .....	12
3. Théorème du choix .....	12
4. Distribution continue, discontinue .....	16
5–6. Intégrale de Stieltjes .....	17
7–10. Potentiels généralisés .....	20
11–12. L'intégrale d'énergie .....	23

### II. Le théorème d'équilibre.

13. Énoncé du problème .....	26
14–16. Lemmes .....	27
17–18. Le théorème fondamental .....	34
19. Propriétés d'extremum .....	40
20. Remarque .....	41

### III. Mesures de capacité.

21. Préliminaire .....	43
------------------------	----

22. Capacité selon Wiener .....	43
23. Capacité selon de la Vallée Poussin .....	44
24. Diamètre transfini .....	45
25. Diamètre transfini généralisé .....	46
26-27. Définition générale de la capacité .....	48
28. Ensembles fermés .....	51
29. Une inégalité .....	53
30. Capacité newtonienne .....	54

#### **IV. Extensions du théorème d'équilibre.**

*Théorème d'équilibre pour un ensemble fermé et borné quelconque.*

31. Théorème .....	56
32. Densité capacitaire et condition de Poincaré généralisée .....	57

*Problème dans le plan.*

33. Potentiel logarithmique .....	60
34. Théorème d'équilibre dans le plan .....	62
35. Projection stéréographique .....	62

#### **V. Méthode du balayage et principe du maximum.**

36. Préliminaire .....	64
37. Balayage (imprécis) dans le cas général .....	64
38. Principe du maximum .....	66
39. Balayage dans le cas newtonien .....	68
40. Fonction de Green .....	72

## VI. Problème de Dirichlet.

41. Problème classique et problème généralisé .....	75
42. Points réguliers, points irréguliers .....	76
43. Lemme de Kellogg .....	78

## VII. Ensembles de capacité nulle.

44. Infinis d'un potentiel .....	80
45–46. Distributions sur un ensemble de capacité nulle .....	81
47. Mesure de Hausdorff .....	84
48–49. Dimension capacitaire .....	88

## VIII. Applications à la théorie des fonctions.

### *Fonctions méromorphes.*

50–51. Premier théorème fondamental de Nevanlinna .....	90
52–54. Valeurs limites d'une fonction de caractéristique bornée .....	92
55. Valeurs exceptionnelles d'une fonction de caractéristique non bornée 97	

### *Fonctions holomorphes dans le cercle unité.*

56. Fonctions de la classe $\mathcal{U}$ .....	100
57. Forme canonique .....	101
58. Conditions pour qu'une fonction soit un produit de Blaschke ...	103
59–61. Valeurs exceptionnelles d'une fonction de la classe $\mathcal{U}$ .....	105
62. Type de la fonction de représentation .....	110

## Introduction.

La théorie de l'intégrale de LEBESGUE est fondée sur la théorie de la *mesure des ensembles*, avec les notions élémentaires de longueur, d'aire, de volume etc. comme point de départ. Dans cette théorie les ensembles de *mesure nulle* jouent un rôle fondamental; ils s'imposent le plus souvent comme des *ensembles exceptionnels* dont il faut faire abstraction dans l'énoncé de plusieurs théorèmes de la plus haute importance. On en dérive la notion de *presque partout* en disant qu'une propriété se présente presque partout si elle se présente en tout point sauf au plus dans un ensemble de mesure nulle. En revanche, les valeurs que prend une fonction dans un tel ensemble n'exercent aucune influence sur l'intégrale de cette fonction, c'est-à-dire que les ensembles exceptionnels sont à la fois en quelque sorte des ensembles négligeables.

Des questions analogues se présentent dans la théorie du potentiel à laquelle nous avons consacré la plus grande partie de cet ouvrage. Il s'agira ici de potentiels engendrés par des masses dont la loi de répartition est donnée par une fonction additive d'ensemble, tout à fait arbitraire. Or quelle est ici la mesure naturelle, quels sont ici les ensembles exceptionnels? En cherchant une réponse à cette question on est conduit à mesurer les ensembles par leur *capacité*, et les ensembles exceptionnels seront alors ceux de *capacité nulle*.

Nous commençons par un exposé assez large des fonctions additives d'ensemble et de l'intégrale de STIELTJES avec des applications à la théorie du potentiel (I). Quant aux fonctions additives, nous nous appuyons surtout sur la Monographie excellente de M. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire (Coll. Borel)*, 2<sup>e</sup> éd. Paris 1934, où l'on trouve aussi une Note succincte sur l'intégrale de STIELTJES. Cependant, le théorème important du choix (n<sup>o</sup> 4) n'entre pas dans cet ouvrage.

Dans le chapitre II, nous étudions le problème classique, considéré déjà par GAUSS, de distribuer une masse positive donnée sur un domaine dans l'espace, de manière que le potentiel devienne constant dans celui-ci (problème d'équilibre). Bien entendu, il ne s'agit pas de calculer effectivement la distribution d'équilibre, mais de la démonstration d'existence. II

va ressortir de nos recherches qu'une telle distribution existe sous des conditions très générales. De plus, notre démonstration se base essentiellement sur un principe de variation dû à GAUSS *qui ne dépend que très peu des propriétés harmoniques du potentiel ordinaire; on reconnaît en effet que c'est le principe du maximum qui joue le rôle fondamental*. D'où il résulte que le théorème d'équilibre est valide pour une classe très étendue de *potentiels dits généralisés*. En effet, nos considérations se rapportent dès l'abord aux potentiels où la fonction de distance  $1/r$ , figurant dans le potentiel ordinaire, est remplacée par une fonction plus générale  $\Phi(r)$  soumise à certaines conditions convenables. En particulier, nous nous occupons des *potentiels dits d'ordre  $\alpha$*  déterminés par  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre réel positif. Ces potentiels ont fait l'objet d'une étude féconde de M. M. RIESZ<sup>1</sup>, études qui ne sont pas encore publiées mais dont nous avons en le privilège de prendre connaissance. M. RIESZ est parvenu au potentiel généralisé en cherchant une généralisation de l'intégrale bien connue de RIEMANN-LIOUVILLE pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions, et aussi en donnant à la notion de "partie finie", due à M. HADAMARD, le sens de prolongement analytique par rapport à l'exposant  $\alpha$ . Dans ses recherches, M. RIESZ considère en particulier les fonctions qu'on obtient en composant les potentiels de deux distributions données, considérations dont nous faisons un usage essentiel dans la démonstration du lemme 3 (n° 16). Ajoutons que M. RIESZ suppose en général, les problèmes traités par lui n'ayant pas le même caractère que les nôtres, que la distribution est donnée par une fonction de densité remplissant des conditions de continuité et de dérivabilité convenables.

Le problème d'équilibre étant résolu pour des domaines fermés suffisamment réguliers, la définition de la capacité d'un tel domaine par rapport au potentiel considéré en découle tout naturellement. La définition de la capacité d'un *ensemble quelconque* peut se faire de manières différentes. Après un aperçu succinct des recherches antérieures sur ce sujet, en particulier en ce qui concerne la capacité newtonienne et le diamètre transfini, nous donnons dans le chapitre III deux définitions qui sont équivalentes pour tout potentiel pour lequel le problème d'équilibre est possible. Nous

<sup>1</sup>M. RIESZ, Intégrale de Riemann-Liouville, Potentiel. Ondes. Présenté à la *Société Physiographique de Lund* le 1<sup>er</sup> novembre 1933. Outre les intégrales de Riemann-Liouville de caractère elliptique qu'on retrouve ici, M. RIESZ considère aussi des intégrales de caractère hyperbolique et parabolique.

avons choisi la définition de manière que la capacité devienne une sorte de *mesure intérieure*, égale à la borne supérieure des capacités des ensembles *fermés* contenus dans l'ensemble donné. Il est clair qu'il intervient ici un certain degré d'arbitraire, mais nous croyons que notre choix sera bien justifié par les applications qui suivent.

Nous reprenons dans le chapitre IV l'étude du problème d'équilibre pour un ensemble fermé et borné quelconque, et nous démontrons qu'il existe toujours une répartition d'équilibre unique dont le potentiel est constant dans l'ensemble donné, à l'exception au plus d'un ensemble de points de capacité nulle. De plus, en introduisant la notion de *densité capacitaire* nous pouvons énoncer un théorème plus précis: *le potentiel de la distribution d'équilibre est égal à une constante en tout point où la densité capacitaire supérieure de l'ensemble donné est  $> 0$* . Nous terminons ce chapitre par une étude du potentiel logarithmique dans le plan, qui offre un intérêt, particulier puisque le logarithme n'est pas constamment positif.

Dans le chapitre V nous exposons d'abord une méthode de "*balayage*" pour les potentiels généralisés dont nous nous servons pour établir le principe du maximum en toute sa généralité. Ce balayage se ramène dans le cas du potentiel newtonien au balayage ordinaire dit de POINCARÉ, considéré d'ailleurs déjà par GAUSS. Nos démonstrations reposent en principe sur la même méthode de variation que nous avons employée plus haut pour établir l'existence d'un potentiel d'équilibre. Nous obtenons au surplus la, *fonction de GREEN*, définie directement comme un potentiel. Ces considérations sont étroitement liées au problème général de DIRICHLET dont nous donnons un exposé succinct dans le chapitre suivant. Il en découlera comme résultat principal que *les points irréguliers pour le problème de DIRICHLET forment un ensemble dont la capacité newtonienne est nulle*. Nous remarquons que le lemme dit de KELLOGG, tout récemment démontré, en est une conséquence évidente.

La capacité est une mesure dont la détermination effective est très difficile. En général, il faut se contenter de décider si elle est nulle ou non. Nous traitons ce problème et des questions analogues dans le chapitre VII. Ces recherches ont surtout pour but de mettre la notion de capacité en rapport avec les *mesures* de HAUSDORFF et d'en tirer une conclusion relativement à la notion de *dimension*.

Dans le dernier chapitre nous donnons quelques applications de la no-

tion de capacité à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous nous occupons en particulier des *valeurs exceptionnelles* d'une fonction méromorphe dans le sens de M. NEVANLINNA, et d'une extension de cette notion aux fonctions holomorphes dans le cercle unité. On reconnaît que la mesure de *capacité logarithmique* est d'une importance capitale dans ces questions-ci, elle l'est sans doute encore en plusieurs autres cas dans cette théorie.

En publiant le présent travail, ma reconnaissance va tout d'abord à mes maîtres de mathématiques de l'Université de Lund, MM. les Professeurs M. RIÉSZ et N. ZEILON qui, l'un et l'autre, ont cultivé mon goût pour les sciences exactes. Mon intérêt particulier pour la théorie des fonctions et les questions connexes a trouvé aux conférences de M. le Professeur RIÉSZ un stimulant puissant que sont venus accroître encore de fréquents entretiens où j'ai eu le privilège de voir s'approfondir les aperçus des cours publics et se dessiner les théories qui m'ont conduit à ce modeste ouvrage. La simplicité et la clarté de ses exposés m'ont tout particulièrement été profitables sous le rapport de la méthode. Dans tout le cours de mon travail, il a guidé mes recherches avec non moins de bienveillance que d'autorité, et ce m'est un précieux devoir que de lui exprimer ma respectueuse gratitude. Je suis redevable à M. G. HÖSSJÉR, maître de Conférences à Lund, de bien des points de vue féconds dans les questions touchant la théorie des fonctions, et du bénéfice de maintes et précieuses discussions dans ce domaine. J'exprime aussi mes vifs et cordiaux remerciements à tous mes camarades pour le concours amical qu'ils m'ont prêté. Je prie aussi M. P. TISSEAU, Lecteur à l'Université de Lund, d'agréer mes sincères remerciements pour l'aide qu'il m'a apportée dans la révision du texte.

## I. Distributions de masses et potentiels généralisés.

**1. Fonctions additives d'ensemble.** – Les ensembles dont nous allons nous occuper dans ce travail sont des ensembles de points faisant partie d'un espace euclidien  $\omega$  à un nombre fini de dimensions. Soit  $x, y, \dots$  un système de coordonnées rectangulaires dans cet espace, il y a notamment à distinguer les ensembles, formés de tous les points dont les coordonnées vérifient un système d'inégalités de la forme

$$\begin{array}{ll} a < x < b, & a \leq x \leq b, \\ c < y < d, & \text{ou } c \leq y \leq d, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

On les appelle *intervalles*, indépendamment du nombre de dimensions, et, plus exactement, *intervalles ouverts* ou *intervalles fermés* selon que le signe d'égalité ci-dessus est exclu ou compris. Plus généralement, nous considérons dans l'espace  $\omega$  une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles ayant les propriétés suivantes:

1. Si  $E$  est un ensemble de la famille  $\mathcal{F}$  il en sera de même de l'ensemble complémentaire  $\omega - E$ .
2. Si  $E_1, E_2, \dots$  sont un nombre fini ou même une infinité dénombrable d'ensembles de la famille  $\mathcal{F}$ , leur somme<sup>1</sup>  $E = E_1 + E_2 + \dots$  appartient encore à  $\mathcal{F}$ .
3. La famille  $\mathcal{F}$  contient tous les intervalles dans  $\omega$ .

Les deux premières propriétés montrent que l'on peut effectuer indéfiniment les opérations fondamentales<sup>1</sup>, l'addition, la soustraction et la multiplication, sur les ensembles de  $\mathcal{F}$  sans sortir de cette famille. On exprime cela en disant que  $\mathcal{F}$  est un *corps fermé* d'ensembles. Puisque, par la dernière hypothèse,  $\mathcal{F}$  contient tous les intervalles dans  $\omega$ , ce corps fermé contient au moins tous les ensembles qu'on peut construire, en partant de

---

<sup>1</sup>Pour les définitions voir p. ex. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue etc.*, p. 5.

ceux-là, par les opérations fondamentales en nombre fini ou infini, c'est-à-dire, tous les ensembles dits *mesurables*  $B$ , introduits pour la première fois par M. BOREL. Ces ensembles constituent en eux-mêmes un corps fermé que nous désignerons par  $\mathcal{B}$ . En particulier, les *ensembles ouverts*, étant des sommes finies ou infinies d'intervalles, et les *ensembles fermés*, complémentaires des ensembles ouverts, appartiennent à  $\mathcal{B}$ .

Supposons qu'à tout ensemble  $E$  d'un corps fermé  $\mathcal{F}$  on fait correspondre une valeur finie  $f(E)$ , cette correspondance définit une *fonction d'ensemble* dans ce corps. Elle est dite *additive* si l'on a

$$f(E_1 + E_2 + \dots) = f(E_1) + f(E_2) + \dots,$$

pourvu que  $E_1, E_2, \dots$  soient des ensembles sans point commun deux à deux (disjoints). Pour l'ensemble vide on a par conséquent  $f = 0$ . L'additivité est *complète* si elle subsiste pour une infinité dénombrable d'ensembles disjoints; dans le cas contraire, l'additivité est *restreinte*. Sauf indication contraire, nous supposerons toujours que l'additivité est complète.

Une fonction additive dans un corps fermé d'ensembles est à *variation bornée* dans ce corps et elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions additives et non négatives (donc monotones). En conséquence, la plupart des résultats obtenus pour les fonctions additives monotones peuvent s'étendre à des fonctions additives générales. Dans la suite, nous aurons à considérer soit des fonctions additives et non négatives, que nous désignerons par les lettres  $\mu, \nu, \dots$ , soit des fonctions additives de signe variable, désignées par  $\sigma$ , et nous pouvons écrire  $\sigma = \mu - \nu$ .

La conception la plus naturelle d'une fonction additive d'ensemble est celle d'une répartition de masse dans l'espace  $\omega$ , en effet, la masse répartie sur un ensemble  $E$  est la valeur de la fonction sur cet ensemble. La masse peut être de signe constant ou de signe variable selon le cas, mais elle est toujours bornée, puisque la variation totale de la fonction est bornée. A ce sujet, rappelons un théorème de M. HAHN<sup>2</sup>:

*Soit  $a$  une fonction additive d'ensemble dans un corps fermé  $\mathcal{F}$ . Il est alors possible de diviser l'espace  $\omega$  en deux ensembles disjoints  $M$  et  $N$ , appartenant à  $\mathcal{F}$ , tels que*

<sup>2</sup>H. HAHN, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 404. Voir encore: W. SIERPIŃSKI, *Démonstration d'un théorème sur les fonctions additives d'ensemble*, Fund. Math. **5** (1924).

$\sigma(E) \geq 0$  sur chaque sous-ensemble  $E$  de  $M$  appartenant à  $\mathcal{F}$ ,  
 $\sigma(E) \geq 0$  sur chaque sous-ensemble  $E$  de  $N$  appartenant à  $\mathcal{F}$ ,

Cela veut dire qu'on peut diviser  $\omega$  en deux parties, l'une sur laquelle la masse reste positive, l'autre sur laquelle elle reste négative. Nous en ferons usage dans la suite.

**2. Ensemble régulier.** — Soit  $E$  un ensemble quelconque, on dit que  $P$  est un *point intérieur* de  $E$  s'il est contenu dans un intervalle ouvert ne contenant que des points de  $E$ . Si  $P$  est un point intérieur de l'ensemble complémentaire  $\omega - E$ , on dit qu'il est *extérieur* à  $E$ . Un point qui n'est ni intérieur ni extérieur à  $E$ , est appelé un *point frontière* de  $E$  (et de son complémentaire). L'ensemble de tous les points frontières, que nous appelons tout simplement *la frontière* de  $E$ , est évidemment fermé. Il peut encore se définir de la manière suivante. Désignons par  $\overline{E}$  l'ensemble  $E$  augmenté de ses points limites, appelé aussi *la fermeture* de  $E$ , et par  $\underline{E}$  l'ensemble ouvert formé de tous les points intérieurs de  $E$  (cet ensemble peut évidemment être vide). Alors, la frontière est l'ensemble  $\overline{E} - \underline{E}$ . Nous dirons qu'un ensemble  $E$  du corps  $\mathcal{F}$  est *régulier*<sup>3</sup> relativement à une fonction additive et monotone  $\mu$  si celle-ci s'annule sur la frontière de  $E$ . En particulier, si  $E$  est vide,  $E$  est régulier seulement dans le cas où  $\mu(E) = 0$ . Si  $E$  est régulier, il en est de même de l'ensemble complémentaire.

**3. Théorème du choix.** — Considérons maintenant une suite illimitée  $\mu_1, \mu_2, \dots$  de fonctions additives et non négatives, définies dans le corps fermé  $\mathcal{B}$  des ensembles mesurables  $\mathcal{B}$ . Nous nous demandons s'il existe une fonction additive  $\mu$  dans cette famille qui ait le caractère d'une fonction limite de la suite donnée. Or ici nous rencontrons une difficulté, car, d'une part, si les fonctions  $\mu_n$  sont regardées comme des répartitions de masse, l'existence d'une répartition limite  $\mu$  peut être irréfutable, d'autre part,  $\mu$  n'est pas toujours la limite des  $\mu_n$  sur tous les ensembles de  $\mathcal{B}$ . Pour donner un exemple, distribuons d'abord la masse  $m$  sur la surface d'une sphère de rayon  $r < 1$ , de façon que la densité soit constante, et faisons ensuite tendre  $r$  en croissant vers l'unité. Nous obtenons ainsi une suite de répartitions de masse et une répartition limite évidente, autrement dit,

<sup>3</sup>F. RIESZ, Mémoire cité dans la note 1, p. 10.

une suite  $\mu_r$  de fonctions additives d'ensemble et une fonction limite  $\mu$ . Mais sur l'ensemble ouvert, formé de tous les points strictement intérieurs à la sphère de rayon  $rn$ , la fonction limite  $\mu$  est égale à zéro, tandis que la limite des valeurs des fonctions  $\mu_r$  est égale à  $m$  sur cet ensemble. Au contraire, si  $E$  est un ensemble régulier relativement à  $\mu$ , p. ex. dont la frontière ne contient aucune partie de la surface de la sphère limite, on a

$$\mu(E) = \lim \mu_r(E).$$

Cette remarque nous conduira à la définition suivante de la convergence des fonctions additives d'ensemble:

*La suite  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  de fonctions additives et non négatives, définies dans le corps fermé  $\mathcal{B}$  d'ensembles, sera dite convergente si l'on peut trouver une fonction additive  $\mu$  dans ce corps, telle que sur tout ensemble  $E$  de  $\mathcal{B}$ , régulier relativement à  $\mu$ , on a*

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E).$$

Cette définition nous donnera le théorème suivant, énoncé pour des fonctions d'ensemble ouvert par M. F. RIESZ<sup>4</sup> dans son Mémoire sur les fonctions sousharmoniques. Plus tard, M. DE LA VALLÉE POUSSIN<sup>5</sup> l'a démontré et en a fait grand usage dans ses recherches sur la méthode du balayage de POINCARÉ:

*De toute suite illimitée de fonctions additives uniformément bornées on peut extraire une suite partielle convergente.*

La démonstration ci-dessous est en substance celle de M. RIESZ. Admettons pour fixer les idées que  $\omega$  soit le plan à deux dimensions et que toutes les fonctions s'annulent hors d'un carré dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées. Nous partageons ce carré en quatre carrés égaux, chacun de ceux-ci en quatre nouveaux carrés et ainsi de suite. Par cette

<sup>4</sup>F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.* **54** (1930), p. 351.

<sup>5</sup>C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* **2** (1932), Note I, p. 223.

Cf. aussi: J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Wiener Sitzungber.* **122** (1913), p. 1366.

construction nous obtenons un réseau dont les mailles sont des intervalles (fermés ou ouverts). Ces intervalles et leurs sommes, différences et produits finis entre eux, constituent une famille dénombrable d'ensembles. En employant le théorème bien connu de BOLZANO-WEIERSTRASS et ensuite le procédé diagonal, nous pouvons de la suite initiale de fonctions additives extraire une suite partielle  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  telle que si  $I$  est un ensemble de ladite famille, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I)$  existe.

En désignant par  $I_f$  et  $I_o$  les ensembles fermés et ouverts de ce genre, nous définissons maintenant une fonction d'ensemble  $\mu$ , en premier lieu, seulement sur les ensembles ouverts  $O$  et sur les ensembles fermés  $F$ , par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\mu(O) &= \text{borne sup.}_{I_f \subset O} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_f) \right\} \\ \mu(F) &= \text{borne inf.}_{I_o \supset F} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_o) \right\}\end{aligned}$$

On voit sans peine que la fonction  $\mu$  est monotone, c'est-à-dire que, si l'ensemble ouvert ou fermé  $E_1$  est contenu dans l'ensemble ouvert ou fermé  $E_2$ , on a  $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ . De plus, elle est additive au sens restreint sur les ensembles où elle est définie. Ainsi

$$\begin{aligned}\mu(O_1 + O_2 + \dots + O_n) &= \mu(O_1) + \mu(O_2) + \dots + \mu(O_n), \\ \mu(F_1 + F_2 + \dots + F_n) &= \mu(F_1) + \mu(F_2) + \dots + \mu(F_n),\end{aligned}$$

pourvu que les  $O$  et les  $F$  soient disjoints. C'est là une conséquence immédiate de l'additivité des  $\mu_n$ . Plus loin, quel que soit  $I_f \subset O$ , on a pour tout  $n$ ,  $\mu_n(I_f) \leq \mu_n(O)$ , donc aussi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(O)$ . Par conséquent,

$$(1) \quad \mu(O) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(O).$$

On voit de même que

$$(2) \quad \mu(F) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F).$$

D'où il vient

$$\begin{aligned}\mu(O) &\geq \text{borne sup.}_{F \subset O} \left\{ \mu(F) \right\} \geq \text{borne sup.}_{F \subset O} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \right\} \\ &\geq \text{borne sup.}_{I_f \subset O} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_f) \right\} = \mu(O),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mu(F) &\leq \text{borne inf.}_{O \supset F} \left\{ \mu(O) \right\} \leq \text{borne inf.}_{O \supset F} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(O) \right\} \\ &\leq \text{borne inf.}_{I_o \subset F} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I_o) \right\} = \mu(F).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(3) \quad \begin{aligned}\mu(O) &= \text{borne sup.}_{F \subset O} \left\{ \mu(F) \right\}, \\ \mu(F) &= \text{borne inf.}_{O \supset F} \left\{ \mu(O) \right\}.\end{aligned}$$

Cela posé, soit  $E$  un ensemble tout à fait arbitraire, il existe des ensembles fermés  $F$  contenus dans  $E$ , et il existe des ensembles ouverts  $O$  contenant  $E$ . Nous écrivons

$$\begin{aligned}\underline{\mu}(E) &= \text{borne sup.}_{F \subset E} \left\{ \mu(F) \right\}, \\ \bar{\mu}(E) &= \text{borne inf.}_{O \supset E} \left\{ \mu(O) \right\}.\end{aligned}$$

et nous dirons que  $E$  est un ensemble *normal* ou *mesurable* par rapport à la fonction  $\mu$ , si ces deux quantités sont égales. Dans ce cas, nous les désignerons par la même notation  $\mu(E)$ <sup>6</sup>. Les raisonnements qu'on a à faire pour étendre la mesure élémentaire (longueur, aire etc.) des intervalles aux ensembles, mesurables au sens de LEBESGUE, peuvent maintenant être répétés presque mot à mot, et l'on voit ainsi que les ensembles

---

<sup>6</sup>La définition de la normalité ne dépend évidemment pas du procédé par lequel la fonction additive  $\mu$  est définie. Elle est la même si  $\mu$  est une fonction donnée à priori.

normaux constituent un corps fermé d'ensembles, dans lequel la fonction déterminante  $\mu$  est additive au sens complet. D'après les relations (3) ci-dessus les ensembles ouverts et les ensembles fermés sont normaux, donc, ce corps contient au moins tous les ensembles mesurables  $B$ , c'est-à-dire que la fonction  $\mu$  est bien définie au moins dans la famille  $\mathcal{B}$ .

Supposons maintenant que  $E$  soit un ensemble mesurable  $B$  qui est régulier par rapport à  $\mu$ . On aura alors

$$\begin{aligned} \mu(E) = \mu(\underline{E}) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\underline{E}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{E}) \leq \mu(\overline{E}) = \mu(E). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité seule est possible et l'on a

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E).$$

C. Q. F. D.

**4. Distribution continue, discontinue.** — Une fonction additive  $\mu(E)$  d'ensemble normal est dite *continue* si elle tend vers zéro avec le diamètre de  $E$ . Cela revient à dire qu'elle s'annule sur tout point isolé, et par conséquent, sur tout ensemble dénombrable. Dans le cas contraire, il existe des points sur lesquels la fonction a une valeur différente de zéro, c'est-à-dire qu'il existe des points isolés qui portent une masse non nulle. L'ensemble de ces points appelés points de *discontinuité*, est dénombrable puisque la variation totale est bornée. On démontre facilement qu'une fonction d'ensemble discontinue peut s'écrire comme la somme de deux fonctions d'ensemble dont l'une est continue, tandis que l'autre, appelée la *fonction des sauts*, a toute sa variation concentrée aux points de discontinuité.

Nous venons de voir qu'une fonction additive continue s'annule sur tout ensemble dénombrable, ou, autrement dit, il n'est pas possible de faire une répartition continue d'une masse positive sur un ensemble dénombrable. En réalité, nous pouvons énoncer la proposition suivante pour les ensembles fermés:

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une distribution continue de masse positive sur un ensemble fermé, est que cet ensemble soit non dénombrable.*

D'après ce qu'on a dit plus haut, il suffit évidemment de prouver que la condition est suffisante. Admettons donc que l'ensemble donné soit non dénombrable; il contient alors, d'après le théorème bien connu de CANTOR-BENDIXSON, un sous-ensemble parfait  $F$ . Supposons que cet ensemble soit contenu dans un intervalle  $I$  et faisons une première distribution, d'ailleurs quelconque, de la masse unité sur cet intervalle. Désignons par  $\mu_1$  la fonction additive correspondante. Nous construisons ensuite un réseau en subdivisant  $I$  en intervalles fermés plus petits ayant des frontières communes. Après un nombre de subdivisions consécutives, le nombre des intervalles partiels de  $I$  qui contiennent une partie parfaite de  $F$ , sera nécessairement  $\geq 2$ . Nous faisons maintenant une nouvelle distribution de la masse unité sur ces intervalles, de manière que chacun contienne une masse  $m \leq 1/2$ . La fonction additive correspondante sera appelée  $\mu_2$ . Nous traitons chacun de ces nouveaux intervalles de la même façon que  $I$ , mais avec la masse initiale  $m$ , et ce procédé peut être poursuivi indéfiniment, car  $F$  n'a aucun point isolé et chaque intervalle, portant une masse non nulle, se partagera nécessairement encore une fois. De la suite des fonctions additives ainsi obtenues on peut extraire une suite partielle qui est convergente. La fonction limite est manifestement continue et s'annule hors de l'ensemble parfait  $F$ , tandis que la valeur de la fonction est  $= 1$  sur  $F$ . C'est-à-dire que cette fonction additive exprime une répartition continue de la masse unité sur l'ensemble parfait  $F$ , donc, sur l'ensemble donné.

**5. Intégrale de Stieltjes.** — Rappelons quelques notions concernant l'intégrale de STIELTJES. Supposons que  $f(P)$  soit une fonction continue bornée du point  $P$  et désignons par  $\mu$  une répartition de masse positive dans un domaine (intervalle) borné  $R$  de  $\omega$ . Décomposons  $R$  en  $p$  portions  $\Delta_i$ , sans points communs, p. ex. des carrés, des cubes etc.; nous choisissons dans chaque  $\Delta_i$ , un point quelconque  $P_i$  et formons la somme

$$\sum_{i=1}^p f(P_i)\mu(\Delta_i).$$

Sous la seule condition que le diamètre de toute portion  $\Delta_i$  tende vers zéro quand  $p$  tend vers l'infini, cette somme tend vers une limite bien définie

$$\int_R f(P) d\mu$$

qui s'appelle l'intégrale de STIELTJES de la fonction  $f(P)$  par rapport à la distribution  $\mu$ .

En suivant la méthode adoptée par M. LEBESGUE pour généraliser l'intégrale de RIEMANN ordinaire, on étend facilement la définition de l'intégrale de STIELTJES à des fonctions  $f(P)$  discontinues. En effet, soit  $f(P)$  une fonction bornée et mesurable  $B$ , ayant la borne inférieure  $m$  et la borne supérieure  $M$  dans l'espace  $\omega$ , et soit  $\mu$  une fonction additive et non négative d'ensemble. Partageons l'intervalle  $(m, M)$  d'une façon quelconque par des nombres croissants

$$m = l_0, l_1, l_2, \dots, l_p = M,$$

et désignons par  $E_1$  l'ensemble des points de  $\omega$  où  $f(P) < l_1$ , par  $E_2$  l'ensemble où  $l_1 \leq f(P) < l_2$ , et ainsi de suite, de manière que chaque point de  $\omega$  soit intérieur à un seulement des ensembles  $E_1, E_2, \dots$ . Ceux-ci sont mesurables  $B$  par hypothèse, et les deux sommes

$$\sum_{i=1}^p l_{i-1} \mu(E_i) \text{ et } \sum_{i=1}^p l_i \mu(E_i)$$

ont par conséquent un sens précis. Quand tous les intervalles partiels  $(l_{i-1}, l_i)$  tendent vers zéro, et, par suite  $p$  vers l'infini, les deux sommes ci-dessus tendent vers une limite commune que nous appelons l'intégrale de STIELTJES-LEBESGUE-RADON de la fonction  $f(P)$  par rapport à  $\mu$ <sup>7</sup>. Nous l'écrivons sous la même forme que l'intégrale de STIELTJES

$$\int_{\omega} f(P) d\mu.$$

L'intégrale ainsi définie s'accorde avec celle de STIELTJES dans le cas où  $f(P)$  est continue, mais elle est beaucoup plus générale.

Si  $f(P)$  (continue ou non) est bornée d'un côté seulement, p. ex. intérieurement ( $m \leq f(P) \leq +\infty$ ), on commence par définir une fonction bornée  $f_N(P)$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} f_N(P) &= f(P) & \text{si } f(P) < N; \\ f_N(P) &= N & \text{si } f(P) \geq N. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Si la fonction additive  $\mu$  est la mesure ordinaire, on retrouve l'intégrale de LEBESGUE. La définition générale dans le sens adopté ici a été donnée pour la première fois par J. RADON, *Wiener Sitzungsber.* **122** (1913). — Voir aussi p. ex.: S. SAKS, *Théorie de l'intégrale (Monografie Matematyczne 2)*, Warszawa 1933, Annexe.

L'intégrale

$$\int_{\omega} f_N(P) d\mu$$

a une limite finie ou infinie positive quand  $N$  tend vers l'infini et cette limite sera par définition l'intégrale de  $f(P)$ . Nous nous contentons de cette généralisation, le cas plus compliqué où les deux bornes sont infinies n'entrant pas dans nos considérations.

D'autre part, on aura souvent à considérer des intégrales par rapport à une fonction additive  $\sigma$  de signe variable mais à variation bornée. Elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions non négatives

$$\sigma = \mu - \nu$$

et l'intégrale de  $f(P)$  par rapport à  $\sigma$  sera la différence des intégrales par rapport à  $\mu$  et à  $\nu$ :

$$(2) \quad \int_{\omega} f(P) d\sigma = \int_{\omega} f(P) d\mu - \int_{\omega} f(P) d\nu.$$

Elle a donc toujours un sens bien défini à condition qu'une au moins de ces dernières intégrales soit finie. Cela arrive en particulier si l'intégrale par rapport à la variation totale de  $\sigma$  est finie, les deux intégrales étant alors finies.

**6.** Restant dans l'hypothèse que  $f(P)$  soit continue et bornée, supposons que  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  soient une suite convergente de fonctions d'ensemble additives et non négatives s'annulant hors d'un intervalle  $R$ , et soit  $\mu$  la fonction limite. Je dis que l'on a

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(P) d\mu_n = \int_R f(P) d\mu.$$

En effet, il est toujours possible de décomposer l'intervalle  $R$  en portions  $\Delta_i$ , si petites que l'on veut et qui sont des ensembles réguliers par rapport à  $\mu^8$ , de façon que l'on ait pour chaque indice  $i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta_i) = \mu(\Delta_i).$$

---

<sup>8</sup>F. RIESZ, loc. cit., p. 326.

Ensuite, on peut choisir une décomposition telle que les deux sommes

$$\sum_i f(P_i)\mu_n(\Delta_i) \text{ et } \sum_i f(P_i)\mu(\Delta_i)$$

soient aussi approchées que l'on veut des intégrales

$$\int_R f(P) d\mu_n \text{ et } \int_R f(P) d\mu$$

et cela indépendamment de  $n$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans les sommes finies on obtient la relation cherchée. On l'étend facilement à un domaine non borné.

La généralisation

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n(P) d\mu_n = \int_R f(P) d\mu,$$

où  $f_n(P)$  sont des fonctions continues convergeant uniformément vers la fonction continue et bornée  $f(P)$ , est immédiate.

**7. Potentiels généralisés.** — La théorie de l'intégrale de STIELTJES s'applique en particulier au potentiel de masses réparties dans  $\omega$ . Nous allons dès l'abord considérer le problème d'un point de vue plus général, indiqué déjà dans l'Introduction. Soit  $P$  un point fixe dans  $\omega$ ,  $Q$  un point variable, et désignons par  $r_{PQ}$  la distance euclidienne de  $P$  à  $Q$ . Soit ensuite  $\Phi(r)$  une fonction de  $r$ ,  $= +\infty$  pour  $r = 0$  et continue décroissante pour  $r > 0$ . Pour chaque distribution  $\mu$  de masse positive sur un domaine de  $\omega$ , l'intégrale

$$u(P) = \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q)$$

représente une fonction bien définie ( $\leq +\infty$ ) du point  $P$  que nous appellerons un *potentiel généralisé*. En effet, si  $\omega$  est le plan à deux dimensions et  $\Phi(r) = \log(1/r)$ , nous obtenons *le potentiel logarithmique dans le plan*; si  $\omega$  est l'espace ordinaire et  $\Phi(r) = 1/r$ ,  $u(P)$  est *le potentiel newtonien* et ainsi de suite.

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux distributions superposées de masses positives, le potentiel dû à la distribution résultante  $\mu' = \mu + \nu$  est égal à la somme des

potentiels de  $\mu$  et de  $\nu$ :

$$\int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu'(Q) = \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q) + \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\nu(Q).$$

Une formule analogue est, par définition même (n° 5, (2)), valable pour le potentiel de la différence  $\sigma = \mu - \nu$  et par conséquent pour chaque distribution à variation bornée, mais à condition qu'un au moins des potentiels de  $\mu$  ou de  $\nu$  pris séparément soit fini.

Comme  $\Phi(r)$  est continue pour  $r > 0$ , le potentiel  $u(P)$  est continu en chaque point à l'écart positif des masses; pour les autres points on peut seulement dire que  $u(P)$  est *semicontinue intérieurement*. En effet, en gardant les notations (1) du n° 5 on a par définition même

$$u(P) = \lim_{N \rightarrow \infty} u^{(N)}(P) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu(Q).$$

Les fonctions  $u^{(N)}(P)$  sont continues, non décroissantes avec  $N$  croissant, donc, la fonction limite  $u(P)$  est semicontinue inférieurement. Il est facile de construire des potentiels (même bornés) dont les points de discontinuité sont partout denses sur un domaine<sup>9</sup>.

**8.** Si  $\mu$  est la fonction limite d'une suite convergente de fonctions additives d'ensemble  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  et  $u, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  les potentiels correspondants, on a évidemment par suite de la formule (1) du n° 6 en chaque point à l'écart positif des masses

$$(1) \quad u(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P).$$

Si le point  $P$  est intérieur aux masses on a seulement l'inégalité

$$(2) \quad u(P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P).$$

En effet, pour chaque nombre positif  $N$

$$\int_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu_n(Q) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu_n(Q).$$

<sup>9</sup>Cf. plus loin no 14, lemme 1.

Donc, à la limite pour  $N = \infty$ ,

$$u(P) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P).$$

**9.** Chaque distribution  $\mu$  de masse positive groupe les points de  $\omega$  en deux classes différentes: 1° les points de la première classe sont ceux dont chaque entourage contient une masse non nulle; ils forment un ensemble fermé  $F$ ; 2° chaque point de la seconde classe possède un entourage ne contenant aucune masse; ces points forment l'ensemble ouvert  $\omega - F$ . Pour abrégier, nous appellerons  $F$  le *noyau de masse relatif* à  $\mu$ . Nous supposerons toujours qu'il est un ensemble borné.

**10.** Examinons maintenant la variation du potentiel dans l'espace  $\omega$ . Comme  $\Phi(r)$  est décroissante par hypothèse, le potentiel diminue en général si l'on s'éloigne de l'ensemble  $F$ , pour atteindre sa plus petite valeur au point à l'infini. Mais où est le potentiel maximale? La réponse à cette question exige des recherches plus détaillées sur l'allure de la fonction  $\Phi(r)$ .

Désignons par  $x, y, \dots$  les coordonnées du point  $P$ , par  $a, b, \dots$  celles du point  $Q$  et supposons que la fonction de  $x, y, \dots$

$$\Phi(r_{PQ}) = \Phi(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + \dots})$$

ait des dérivées partielles continues des deux premiers ordres pour  $r_{PQ} > 0$ . Alors, si  $\Phi(r_{PQ})$  satisfait à l'équation de LAPLACE

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dots = 0,$$

il en sera de même du potentiel

$$u(P) = \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q)$$

en chaque point fini de  $\omega - F$ . Dans ce cas, le potentiel est une fonction harmonique en ces points et satisfait par conséquent au principe du maximum:  $u(P)$  ne peut être maximale en un point intérieur du domaine où il est harmonique. Or, cette propriété importante revient non seulement aux

fonctions harmoniques, mais aussi aux fonctions sousharmoniques, dont le laplacien est  $\geq 0$ . Ainsi, supposons

$$(1) \quad \Delta\Phi \geq 0,$$

alors,

$$\Delta u(P) \geq 0$$

dans  $\omega - F$ , et le potentiel sera une fonction sousharmonique ne possédant aucun maximum dans ce domaine. Dans la suite, nous allons considérer particulièrement, outre les potentiels ordinaires correspondant à  $\Phi(r) = \log(1/r)$ ,  $\Phi(r) = 1/r$  etc., encore les potentiels par rapport à  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre réel. Nous les appellerons *potentiels généralisés d'ordre  $\alpha$* . Dans le plan ces potentiels sont sousharmoniques dans  $\omega - F$  pour  $\alpha > 0$ , le laplacien étant

$$\Delta \frac{1}{r^\alpha} = \frac{\alpha^2}{r^{\alpha+2}} > 0;$$

dans l'espace ordinaire il en est ainsi pour  $\alpha > 1$ , car alors

$$\Delta \frac{1}{r^\alpha} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{r^{\alpha+2}} > 0.$$

Supposons en particulier que  $u(P)$  soit une fonction continue dans tout l'espace. Alors, il existe au moins un point où cette fonction est maximée et ce point appartient nécessairement à l'ensemble  $F$ . *Donc, le potentiel atteint sa plus grande valeur dans l'ensemble  $F$* . Nous démontrerons plus loin (n° 38) une généralisation de ce théorème pour des potentiels discontinus.

**11. L'intégrale d'énergie.** — Nous aurons encore à considérer des intégrales doubles de la forme

$$\iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma_1(P) d\sigma_2(Q)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux fonctions additives d'ensemble à variation bornée. Supposons d'abord que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soient toutes deux positives. L'intégrale se définit alors comme la limite, toujours existante,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\sigma_1(P) d\sigma_2(Q),$$

toutefois, cette limite peut être infinie. On a la formule de réduction ( $u_1$  et  $u_2$  étant les potentiels dus à  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ):<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma_1(P) d\sigma_2(Q) &= \int_{\omega} d\sigma_1(P) \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma_2(Q) = \int_{\omega} u_2(P) d\sigma_1(P) \\ &= \int_{\omega} d\sigma_2(Q) \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma_1(P) = \int_{\omega} u_1(Q) d\sigma_2(Q). \end{aligned}$$

Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont de signe variable, supposons pour éviter des complications que l'intégrale double par rapport aux variations totales de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soit finie. On écrit alors

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu_1 - \nu_1; \\ \sigma_2 &= \mu_2 - \nu_2; \end{aligned}$$

et l'intégrale se définit comme la limite pour  $N \rightarrow \infty$

$$\iint_{\omega} \Phi_N d\mu_1 d\mu_2 - \iint_{\omega} \Phi_N d\mu_1 d\nu_2 - \iint_{\omega} \Phi_N d\mu_2 d\nu_1 + \iint_{\omega} \Phi_N d\nu_1 d\mu_2.$$

La formule de réduction subsiste. En particulier, nous aurons à nous occuper du cas  $\sigma_1 = \sigma_2$ . L'intégrale correspondante

$$\iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma(P) d\sigma(Q) = \int_{\omega} d\sigma(P) \int_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\sigma(Q) = \int_{\omega} u(P) d\sigma(P)$$

(le potentiel par rapport à lui-même) a dans la théorie du potentiel newtonien une signification physique évidente: elle représente l'énergie potentielle double. Nous démontrerons plus loin (n° **16**) qu'elle n'est jamais négative. Si le potentiel (newtonien) a des dérivées continues, cela résulte déjà des formules de GREEN et de GAUSS; en effet, on démontre facilement que<sup>11</sup>

$$\iint_{\omega} \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(P) d\sigma(Q) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

<sup>10</sup>Traduction du théorème de TONELLI, voir p. ex.: S. SAKS, Monographie citée, p. 262. On doit observer que les intégrales simples sont bien définies, les potentiels  $u_1$  et  $u_2$  étant des fonctions mesurables  $B$ .

<sup>11</sup>Voir p. ex.: O. D. KELLOGG, Foundations of potential theory (Grundlehren der Math. Wiss. 31), Berlin 1929, p. 279.

**12.** Supposons enfin que  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  soient une suite illimitée de fonctions additives d'ensemble non négatives qui convergent vers une fonction limite  $\mu$ . Posons

$$I(\mu_n) = \iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu_n(P) d\mu_n(Q)$$

et

$$I(\mu) = \iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu(P) d\mu(Q)$$

je dis que

$$(1) \quad I(\mu) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n).$$

En effet,

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu(P) d\mu(Q) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu_n(P) d\mu_n(Q) \end{aligned}$$

Pour chaque nombre  $N$  et  $n$  on a

$$\iint_{\omega} \Phi_N(r_{PQ}) d\mu_n(P) d\mu_n(Q) \leq \iint_{\omega} \Phi(r_{PQ}) d\mu_n(P) d\mu_n(Q) = I(\mu_n).$$

Donc,

$$I(\mu) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n).$$

C. Q. F. D.

## II. Le théorème d'équilibre.

**13. Enoncé du problème.** – Si l'on charge un conducteur d'électricité en position libre avec une masse électrique positive, on sait par expérience que la masse se répartit sur la surface du conducteur de façon que les forces de répulsion électriques soient sans action sur un point intérieur. Cela revient à dire que, la répulsion variant en raison inverse du carré de la distance, le *potentiel newtonien* est constant en tout point du conducteur. On dit alors que la masse est en *distribution d'équilibre* ou en *distribution naturelle*, et le potentiel constant correspondant s'appelle le *potentiel d'équilibre*. Si l'on a un nombre quelconque de conducteurs, accouplés par des fils minces de façon que le fluide électrique puisse passer de l'un à l'autre, le résultat du chargement sera le même: la masse se répartira de manière que le potentiel devienne constant sur chaque conducteur, avec la même valeur sur chacun.

Les considérations précédentes sont purement physiques, pour les rendre rigoureuses au point de vue mathématique, il faut avant tout démontrer qu'il *existe* une distribution d'équilibre pour un système donné de conducteurs. Ce n'a pas été chose facile que de donner une démonstration correcte de ce fait, un grand nombre de mathématiciens du siècle dernier s'en sont occupés.<sup>1</sup> Une analyse approfondie du problème montre que l'existence ne peut être démontrée que sous certaines hypothèses restrictives sur la régularité des surfaces frontières des conducteurs. Parmi ces hypothèses, *suffisantes* mais *non nécessaires*, on trouve p. ex. la condition de POINCARÉ: *chaque point de la surface doit être considéré comme le sommet d'un cône de révolution dont la pointe est toute entière intérieure au conducteur.*<sup>2</sup>

D'autre part, si cette condition est remplie, on peut démontrer l'existence d'une solution unique du problème d'équilibre posé, d'une façon très simple, p. ex. en employant la méthode dite du balayage de POINCARÉ, pour

<sup>1</sup>Nous renvoyons pour l'historique et pour la bibliographie au Livre de O. D. KELLOGG déjà cité, p. 277.

<sup>2</sup>H. POINCARÉ, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. Journ. of Math.* **12** (1890). Dans ce Mémoire le célèbre géomètre admet un nombre fini de points coniques. La condition en général fut posée par M. S. ZAREMBA, Sur le principe du minimum, *Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie* 1909.

laquelle nous renvoyons au Mémoire de M. DE LA VALLÉE POUSSIN déjà cité (p. 10, note 2). Le problème de trouver effectivement la distribution d'équilibre, dit parfois problème de ROBIN<sup>3</sup>, ne peut être résolu explicitement que dans des cas très simples.

Plus généralement, étant donné dans un espace quelconque un ensemble borné et fermé, on peut se demander s'il est possible de répartir une masse positive donnée sur cet ensemble, de façon qu'un certain potentiel généralisé (n° 7) devienne constant en tout point de l'ensemble. En réalité, il va ressortir des recherches ci-dessous que sous des conditions très générales, beaucoup moins restrictives que celle de POINCARÉ, ce problème est résoluble et que la solution est unique. Pour fixer les idées, considérons un ensemble dans l'espace ordinaire à trois dimensions et supposons que le potentiel généralisé soit déterminé par la fonction  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre réel positif. Pour que le potentiel ne soit pas toujours infini à l'intérieur des masses, on doit supposer  $\alpha < 3$ ; pour que le potentiel satisfasse à un principe du maximum, il faut encore ajouter la condition  $\alpha > 1$  (n° 10). En faisant  $\alpha = 1$  nous obtenons le problème classique. Démontrons d'abord trois lemmes, valables pour tout indice  $\alpha < 3$ .

**14. Lemme 1.** – *Soit  $\mu$  une distribution de masse positive,  $u(P)$  son potentiel, la condition nécessaire et suffisante pour que  $u(P)$  soit une fonction continue bornée sur un ensemble fermé  $F$ , est qu'à tout nombre positif  $\varepsilon$ , si petit qu'il soit, corresponde un nombre fixe  $\delta$ , tel que le potentiel dû à la masse intérieure à une sphère de rayon  $\delta$  et centrée en un point quelconque de  $F$  soit  $< \varepsilon$  au centre de la sphère.*

C'est une conséquence presque immédiate de la définition du potentiel et du théorème classique d'après lequel la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions continues et positives ait une somme continue, est que la convergence soit uniforme. On peut aussi faire une démonstration directe, tout à fait analogue à celle du théorème mentionné.

**COROLLAIRE.** *Supposons que  $\mu$  s'annule hors d'un ensemble fermé  $F$ , si son potentiel est continu, considéré comme fonction sur  $F$ , il est encore continu, considéré comme fonction dans tout l'espace.*<sup>4</sup>

<sup>3</sup>G. ROBIN, Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.* (3<sup>e</sup> série) **3** (1886), Suppl.

<sup>4</sup>Cf. G. C. EVANS, Application of Poincaré's sweeping-out process, *Proc. of the*

En effet,  $\varepsilon$  étant donné, on peut choisir le nombre  $\delta$  de manière que le potentiel  $u_{2\delta}$  dû à la masse intérieure à une sphère  $S_{2\delta}$ , de rayon  $2\delta$  et centrée en un point quelconque de  $F$ , soit  $< \varepsilon/2^\alpha$  dans ledit point. Désignons encore par  $u_\delta$  le potentiel dû à la masse intérieure à une sphère  $S_\delta$ , de rayon  $\delta$  et centrée en un point  $P$  quelconque de  $\omega$ . Si la distance du point  $P$  à l'ensemble  $F$  est  $\geq \delta$ , ce potentiel s'annule. Si la distance est  $< \delta$ , la sphère  $S_\delta$  est tout entière intérieure à une sphère  $S_{2\delta}$ , centrée en un point  $Q$  de  $F$ . Nous pouvons supposer que  $Q$  est le point le plus rapproché de  $F$  à  $P$ , ou un de ceux-ci s'il y en a plusieurs. On aura alors

$$u_{2\delta}(Q) < \varepsilon/2^\alpha;$$

donc,

$$\begin{aligned} u_\delta(P) &= \int_{FS_\delta} \frac{1}{r_{PM}^\alpha} d\mu(M) \leq \int_{FS_{2\delta}} \frac{1}{r_{PM}^\alpha} d\mu(M) = \int_{FS_{2\delta}} \left(\frac{r_{QM}}{r_{PM}}\right)^\alpha \frac{1}{r_{QM}^\alpha} d\mu(M) \\ &\leq 2^\alpha \int_{FS_{2\delta}} \frac{1}{r_{QM}^\alpha} d\mu(M) = 2^\alpha u_{2\delta}(Q) < \varepsilon, \end{aligned}$$

puisque le rapport  $r_{QM}/r_{PM}$  est  $\leq 2$  pour tous les points de  $F$ . D'où il résulte du lemme précédent que le potentiel est continu comme fonction dans tout l'espace.

**15. Lemme 2.** – Soit  $u$  le potentiel d'ordre  $\alpha$  engendré par une distribution de masse positive, et désignons par  $m_S(P)$  la moyenne spatiale de  $u$  dans une sphère  $S$  de centre  $P$ . C'est un fait bien connu que dans le cas du potentiel newtonien, c'est-à-dire  $\alpha = 1$ , on a

$$m_S(P) \leq u(P),$$

ce qui montre que ce potentiel est une fonction surharmonique dans tout l'espace. Cette inégalité ne subsiste plus pour un indice  $\alpha$  quelconque, mais nous allons voir que dans ce cas elle peut être remplacée par une autre qui en est l'analogue:

---

*Nat. Ac. of Sc. U. S. A.* **19** (1933), lemme 1, p. 458.

—, On potentials of positive mass I., *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **37** (1935), p. 238.

F. VASILESCO, Sur la continuité du potentiel à travers des masses et la démonstration d'un lemme de Kellogg, *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **200** (1935), p. 1173.

La moyenne spatiale  $m_S(P)$  d'un potentiel d'ordre  $\alpha$ , dû à une masse positive, satisfait à l'inégalité

$$m_S(P) \leq A u(P),$$

où  $A$  est une constante ne dépendant que de l'indice  $\alpha$ .

En effet, soit  $v$  le volume de la sphère  $S$ , nous aurons en désignant par  $d\tau_M$  l'élément de volume au point  $M$ :

$$m_S(P) = \frac{1}{v} \int_A d\tau_M \int_w \frac{d\mu(Q)}{r_{MQ}^\alpha} = \int_w \frac{d\mu(Q)}{r_{PQ}^\alpha} \int_S \left( \frac{r_{PQ}}{r_{MQ}} \right)^\alpha \frac{d\tau_M}{v}.$$

L'intégrale

$$\int_S \left( \frac{r_{PQ}}{r_{MQ}} \right)^\alpha \frac{d\tau_M}{v}$$

ne dépend manifestement que du rapport de la distance  $r_{PQ}$  au rayon de la sphère  $S$ ; en supposant ce rayon égal à un on aura une fonction continue de  $r_{PQ} = r$  qui s'annule pour  $r = 0$  et devient  $= 1$  pour  $r = \infty$ . Cette fonction a par conséquent un certain maximum  $A$ , qui est nécessairement fini et qui ne dépend que de l'indice  $\alpha$ . Avec cette constante on aura

$$m_S(P) \leq A \int_w \frac{d\mu(Q)}{r_{PQ}^\alpha} = A u(P).$$

C. Q. F. D.

Il est facile de prouver que la constante  $A$  est toujours  $= 1$  pour  $\alpha \leq 1$  (cf. n° 20). Pour  $1 < \alpha < 3$  on peut donner une borne supérieure de  $A$  en faisant la remarque suivante. *Le potentiel d'une sphère  $S$  de masse 1, en un point  $Q$  à la distance  $r$  du centre  $P$ , est inférieur au potentiel d'une autre sphère de masse 1, centrée au point  $Q$  et de rayon  $r$ .* Admettons un moment ce fait démontré, nous aurons

$$\int_S \left( \frac{r_{PQ}}{r_{MQ}} \right)^\alpha \frac{d\tau_M}{v} \leq \frac{r^\alpha}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_0^r 4\pi t^{2-\alpha} dt = \frac{3}{3-\alpha}.$$

C'est-à-dire que nous avons

$$A \leq \frac{3}{3-\alpha}.$$

L'inégalité énoncée dans la remarque ci-dessus est manifeste pour tout point  $Q$  intérieur à  $S$  ou sur la frontière.<sup>5</sup> Supposons donc  $Q$  extérieur à  $S$ . Or, en vertu de la symétrie, le potentiel en  $Q$  de la sphère  $S$  est égal à la moyenne prise dans  $S$  du potentiel de la masse unité placée au point  $Q$ . Et, comme ce dernier potentiel est sousharmonique hors de  $Q$  (n° 10), ladite moyenne croît avec le rayon de  $S$ .<sup>6</sup> En faisant tendre ce rayon vers  $r$ , de manière que  $Q$  devienne un point frontière de  $S$ , on est ramené au premier cas. Il est clair que la borne obtenue n'est qu'une appréciation assez grossière.

**16. Lemme 3.** – *Soit  $\sigma$  une fonction additive à variation bornée, l'intégrale double ("l'intégrale d'énergie")*

$$I(\sigma) = \iint_{\omega} \frac{d\sigma(P) d\sigma(Q)}{r_{PQ}^{\alpha}},$$

*supposée existante au sens absolu, est toujours  $\geq 0$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $\sigma$  s'annule identiquement, c'est-à-dire que  $\sigma = 0$  sur tout ensemble mesurable  $B$ .*

On peut baser la démonstration de ce théorème important sur le fait que le noyau symétrique  $1/r_{PQ}^{\alpha}$  peut s'écrire comme un noyau itéré du premier ordre. Dans le langage de la théorie des équations intégrales on peut donc dire que le noyau  $1/r_{PQ}^{\alpha}$  est défini positif. Je dois ce principe de démonstration à M. M. RIESZ qui l'a emprunté à ses résultats sur la composition de potentiels généralisés.

En effet, soient  $P$  et  $Q$  deux points fixes,  $k$  et  $l$  deux nombres positifs satisfaisant aux conditions  $k < 3$ ,  $l < 3$ ,  $k + l > 3$ , nous considérons avec M. RIESZ l'intégrale étendue à tout l'espace  $\omega$

$$\int_{\omega} \frac{1}{r_{PM}^k} \frac{1}{r_{MQ}^l} d\tau_M.$$

Elle ne dépend évidemment que des exposants  $k, l$  et de la distance  $r_{PQ}$  en faisant une homothétie nous pouvons la réduire au cas où  $r_{PQ} = 1$ . Il vient ainsi,  $H(k, l)$  désignant l'intégrale réduite.

<sup>5</sup>Cf. E. SCHMIDT, Bemerkung zur Potentialtheorie, *Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet*, Berlin 1914, p. 368.

<sup>6</sup>F. RIESZ, Mémoire cité, formule (6) p. 344.

$$(1) \quad \int_{\omega} \frac{1}{r_{PM}^k} \frac{1}{r_{MQ}^l} d\tau_M = H(k, l) \frac{1}{r_{PQ}^{k+l-3}}.$$

La constante universelle  $H(k, l)$  est une fonction de  $k$  et de  $l$ , qui dépend en outre du nombre de dimensions de  $\omega$ . Elle a le caractère d'une intégrale d'EULER de première espèce, ce que montre aussi son expression par des fonctions de  $\Gamma$ .<sup>7</sup>

$$H(k, l) = \pi^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+l-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{6-k-l}{2}\right)}.$$

Choisissons maintenant  $k = l = \beta = (\alpha + 3)/2$ , nous aurons

$$\frac{1}{r_{PQ}^{\alpha}} = \frac{1}{H(\beta, \beta)} \int_{\omega} \frac{1}{r_{PM}^{\beta}} \frac{1}{r_{MQ}^{\beta}} d\tau_M.$$

D'où il suit<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} \frac{d\sigma(P) d\sigma(Q)}{r_{PQ}^{\alpha}} &= \iint_{\omega} d\sigma(P) d\sigma(Q) \frac{1}{H(\beta, \beta)} \int_{\omega} \frac{1}{r_{PM}^{\beta}} \frac{1}{r_{MQ}^{\beta}} d\tau_M \\ &= \frac{1}{H(\beta, \beta)} \int_{\omega} d\tau_M \int_{\omega} \frac{d\sigma(P)}{r_{PM}^{\beta}} \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{\beta}} \\ &= \frac{1}{H(\beta, \beta)} \int_{\omega} \left[ \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{\beta}} \right]^2 d\tau_M. \end{aligned}$$

Bien entendu, cette formule suppose l'existence de l'intégrale simple (le potentiel d'ordre  $\beta$  de  $\sigma$ ):

$$u^{(\beta)}(M) = \int_{\omega} \frac{\sigma(Q)}{r_{MQ}^{\beta}}.$$

Or, si l'intégrale double

$$\iint_{\omega} \frac{|d\sigma(P)| |d\sigma(Q)|}{r_{PQ}^{\alpha}}$$

<sup>7</sup>Chez M. RIÉSZ les potentiels sont normés d'une autre manière, par quoi les formules se simplifient beaucoup.

<sup>8</sup>Nous supposons ici comme toujours que la variation totale de  $\sigma$  s'annule à l'infini.

est finie (le seul cas qui nous intéresse), la formule de transformation<sup>9</sup> fait également voir que l'intégrale

$$\int_{\omega} \frac{|d\sigma(Q)|}{r_{MQ}^{\beta}}$$

est finie presque partout. Par conséquent,  $u^{(\beta)}(M)$  est bien défini presque partout. Les autres points peuvent être négligés.<sup>10</sup> Dans l'intégrale transformée la fonction à intégrer est toujours  $\geq 0$ , donc, l'intégrale elle-même est  $\geq 0$ .

Examinons de plus près le cas où l'égalité a lieu. Alors, le potentiel  $u^{(\beta)}(M)$  est bien défini et  $= 0$  presque partout. Dans un ensemble  $E$  de mesure spatiale nulle il peut être différent de zéro ou cesser d'exister. Soit  $P$  un point fixe quelconque, la fonction de  $M$

$$\frac{1}{r_{PM}^{4-\beta}} u^{(\beta)}(M)$$

est alors aussi bien définie et  $= 0$  presque partout, à savoir dans  $\omega - (E+P)$ . Par conséquent, l'intégrale de cette fonction, étendue à l'ensemble  $\omega - (E+P)$ , est encore nulle. Or, nous aurons par la formule (1)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega - (E+P)} \frac{1}{r_{PM}^{4-\beta}} u^{(\beta)}(M) d\tau_M = \int_{\omega - (E+P)} \frac{1}{r_{PM}^{4-\beta}} d\tau_M \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{\beta}} \\ &= \int_{\omega} d\sigma(Q) \int_{\omega - (E+P)} \frac{1}{r_{PM}^{4-\beta}} \frac{1}{r_{MQ}^{\beta}} d\tau_M = \int_{\omega} d\sigma(Q) \int_{\omega} \frac{1}{r_{PM}^{4-\beta}} \frac{1}{r_{MQ}^{\beta}} d\tau_M \\ &= H(4-\beta, \beta) \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{PQ}}. \end{aligned}$$

Pour être sûr que la transformation soit légitime il faut supposer que la dernière intégrale existe au sens absolu. Cela arrive au moins presque partout, et l'on en conclut que le potentiel newtonien de la distribution  $\sigma$

$$(2) \quad \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{PQ}} = 0$$

<sup>9</sup>Celle-ci est sûrement légitime si les éléments d'intégration sont positifs. Cf. la note 1, p. 21.

<sup>10</sup>Cf. G. FUBINI, Sugli integralii multipli, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend.* **16** (1907).

existe et s'annule presque partout dans  $\omega$ .

Supposons maintenant que  $\sigma$  ne soit pas identiquement nulle. D'après le théorème déjà cité de M. HAHN (n° 1) l'espace  $\omega$  se partage en deux ensembles mesurables  $B$ ,  $A$  et  $\omega - A$ , tels que  $\sigma \geq 0$  sur tout sous-ensemble mesurable  $B$  de  $A$ , et  $\sigma \leq 0$  sur tout sous-ensemble mesurable  $B$  de  $\omega - A$ . On peut alors écrire  $\omega = \mu - \nu$ , où  $\mu$  et  $\nu$  sont des fonctions positives, telles que

$$1^\circ \mu \geq 0 \text{ sur } A, \mu = 0 \text{ sur } \omega - A;$$

$$2^\circ \nu \geq 0 \text{ sur } \omega - A, \nu = 0 \text{ sur } A.$$

Admettons  $\mu(A) = a > 0$  et  $\nu(\omega A) = b \geq 0$ . Il existe par conséquent deux ensembles fermés  $F \subset A$  et  $G \subset \omega - A$ , tels que

$$\mu(F) > a - \varepsilon, \quad \nu(G) > b - \varepsilon,$$

et ces ensembles sont à distance positive l'un de l'autre. Il est donc possible de couvrir l'ensemble  $F$ , supposé borné, par un ensemble ouvert  $O$ , tel que  $\nu(O) = \nu(O - F) < \varepsilon$ . On peut d'ailleurs supposer que  $O$  se compose d'un nombre fini de sphères  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , qui peuvent empiéter l'une sur l'autre mais de telle manière que tout point de  $O$  soit intérieur à deux sphères au plus. On aura alors

$$\sum_1^n \mu(S_k) \geq \mu(O) > a - \varepsilon,$$

$$\sum_1^n \nu(S_k) \leq 2\nu(O) < 2\varepsilon;$$

donc,

$$\sum_1^n [\mu(S_k) - \nu(S_k)] = \sum_1^n \sigma(S_k) > a - 3\varepsilon.$$

Par conséquent, sur une au moins des sphères  $S_k$ , p. ex.  $S_1$ , on a

$$\sigma(S_1) > \frac{a - 3\varepsilon}{n} = a' > 0.$$

Entourons maintenant  $S_1$  par une sphère concentrique  $S'_1$ , telle que la masse négative  $\nu$  est  $< \varepsilon' < a'$  dans l'anneau  $S'_1 - S_1$ . C'est alors un

problème tout à fait élémentaire de construire une seconde distribution de masse (positive et négative) dont le potentiel newtonien  $f(Q)$  est continu et en outre satisfait aux conditions:

- 1°  $f(Q) = 1$  dans  $S_1$ ;
- 2°  $0 \leq f(Q) \leq 1$  dans  $S'_1 - S_1$ ;
- 3°  $f(Q) = 0$  en dehors de  $S'_1$ .

On peut d'ailleurs supposer que la densité de la masse soit bornée, de façon que  $f(Q)$  puisse s'écrire

$$f(Q) = \int_{\omega} \frac{1}{r_{PQ}} \kappa(P) d\tau_P.$$

Considérons maintenant l'intégrale de la fonction continue  $f(Q)$  par rapport à la distribution  $\sigma$ . On a d'une part

$$\int_{\omega} f(Q) d\sigma(Q) = \int_{S_1} + \int_{S'_1 - S_1} + \int_{\omega - S'_1} f(Q) d\sigma(Q) > a' - \varepsilon' > 0;$$

d'autre part, cette intégrale s'annule, car, d'après (2),

$$\int_{\omega} f(Q) d\sigma(Q) = \int_{\omega} \int_{\omega} \frac{1}{r_{PQ}} \kappa(P) d\tau_P d\sigma(Q) = \int_{\omega} \kappa(P) d\tau_P \int_{\omega} \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(Q) = 0.$$

On est ainsi arrivé à une contradiction, ce qui prouve le théorème.

**17. Le théorème fondamental.** — Nous sommes maintenant en état de prouver le théorème fondamental suivant qui fait reconnaître l'existence d'un potentiel d'équilibre:

**THÉORÈME.** *Soit  $D$  un nombre fini de domaines fermés dont les frontières satisfont aux conditions de POINCARÉ, il existe une distribution unique de la masse unité dans  $D$  dont le potentiel d'ordre  $\alpha \geq 1$  est constant dans ces domaines.*

Nous allons donner de ce théorème, mais avec plus de rigueur, une démonstration déjà indiquée dans ses grandes lignes par GAUSS<sup>11</sup>. En effet, considérons avec GAUSS l'intégrale double ("l'intégrale d'énergie")

$$(1) \quad I(\mu) = \iint_D \frac{d\mu(P) d\mu(Q)}{r_{PQ}^\alpha}$$

où  $\mu$  est une répartition de la masse unité dans  $D$ , c'est-à-dire que  $\mu$  s'annule hors de  $D$  et  $\mu(D) = 1$ . Notre but sera de prouver qu'il existe une distribution, et une seule, qui rend cette intégrale minimum, et que cette distribution fournit la solution du problème.

Cette idée, si naturelle en vue des expériences physiques, fut le point de départ de GAUSS dans sa démonstration de l'existence d'un potentiel d'équilibre dans le cas newtonien. Cependant, les seules distributions considérées par GAUSS étaient des répartitions de masse sur les frontières de  $D$ , ayant une densité superficielle continue. On peut alors faire l'objection fort grave qu'il n'est nullement sûr a priori qu'il existe effectivement dans ce champ de répartitions un vrai minimum de l'intégrale d'énergie, bien que, d'après GAUSS, cela soit "évident" si l'on se restreint à des répartitions de signe constant ("gleichartige"). Il faut par conséquent tenir compte des répartitions plus générales que celles de GAUSS, en réalité, nous aurons à considérer des répartitions positives arbitraires de la masse unité sur les domaines  $D$ , même dans leur intérieur. Dans ce champ étendu le problème du minimum a sûrement une solution, comme on le verra tout de suite.

En effet, il existe nécessairement une borne inférieure  $V$  de toutes les intégrales  $I(\mu)$ , qui est évidemment finie, et il existe de même une suite de fonctions d'ensemble  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) = V.$$

De cette suite nous pouvons extraire une suite partielle qui converge vers une fonction limite  $\mu$ , et l'on a, d'après une inégalité déjà démontrée (n° 12),

$$I(\mu) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) = V.$$

---

<sup>11</sup>C. F. GAUSS, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte, *Werke* 5, p. 232.

Puisque, par hypothèse, les domaines  $D$  sont fermés, la fonction limite  $\mu$  est encore une distribution de la masse unité dans  $D$ , donc, en vertu de la signification du nombre  $V$ ,

$$I(\mu) \geq V.$$

D'où il vient

$$I(\mu) = V.$$

c'est-à-dire que la distribution  $\mu$  fournit une solution du problème posé. Voici comment on pourrait interpréter ce fait. L'intégrale  $I(\mu)$  est une fonction semicontinue intérieurement sur l'ensemble *compact* de fonctions de distributions dans  $D$ , donc, il existe au moins un élément  $\mu$  pour lequel  $I(\mu)$  est minimum.

Étudions maintenant le potentiel  $u(P)$  dû à la distribution de minimum  $\mu$ . Désignons par  $F$  le noyau de masse, c'est-à-dire l'ensemble fermé contenu dans  $D$  qui porte effectivement la masse (n° 9); en réalité, cet ensemble est parfait puisque la distribution minimisante ne peut être discontinue (dans ce cas l'intégrale  $I(\mu)$  serait infinie). En suivant la marche indiquée par GAUSS nous démontrerons de proche en proche que

- 1°  $u(P)$  est  $\geq V$  en tout point de  $D$  à l'exception au plus d'un ensemble de *mesure spatiale* nulle;
- 2° aucun point de  $D$  n'est exceptionnel;
- 3°  $u(P)$  est  $= V$  en tout point du noyau  $F$ ;
- 4°  $u(P)$  est  $= V$  en tout point de  $D$ .

En effet, l'intégrale d'énergie ayant pour valeur  $V$ , son expression sous forme d'une intégrale simple

$$I(\mu) = \int_F u(P) d\mu(P)$$

montre immédiatement que  $u(P)$  ne peut être constamment  $\leq V - \varepsilon$  dans l'ensemble  $F$ ; il existe donc nécessairement un point  $P_0$  de  $F$  avec  $u(P) > V - \varepsilon$ . En vertu de la semicontinuité,  $u(P)$  est encore  $> V - \varepsilon$  dans un entourage  $O(P_0)$  de  $P_0$ . Cela étant, supposons que  $u(P)$  soit  $\leq V - 2\varepsilon$

en tout point d'un ensemble  $E$  (fermé) de  $D$  dont la *mesure spatiale* est  $> 0$ <sup>12</sup>. Alors, nous pouvons transporter la masse situé dans  $O(P_0)$ , soit  $m$ , à l'ensemble  $E$  et la répartir sur celui-ci de manière que son potentiel devienne borné. Pour cela il suffit p. ex. de rendre la densité spatiale égale à une constante finie convenable en tout point de  $E$  et nulle en dehors. Ce transport de masse peut s'exprimer par une fonction d'ensemble  $\sigma$ , et l'on a

$$\begin{aligned}\sigma &= -\mu \text{ dans } O(P_0); \\ \sigma &> 0 \text{ sur } E \text{ avec } \sigma(E) = \mu[O(P_0)] = m; \\ \sigma &= 0 \text{ en dehors de } O(p_0) + E;\end{aligned}$$

$$I(\sigma) = \iint_D \frac{d\sigma(P) d\sigma(Q)}{r_{PQ}^\alpha} < +\infty.$$

Pour tout nombre positif  $h \leq 1$ , la fonction d'ensemble  $\mu + h\sigma$  est non négative et exprime une répartition de la masse unité dans  $D$ . Par conséquent,

$$\delta I = I(\mu + h\sigma) - I(\mu) \geq 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\delta I &= 2h \int_D u(P) d\sigma(P) + h^2 I(\sigma) \\ &< 2h[m(V - 2\varepsilon) - m(V - \varepsilon)] + h^2 I(\sigma) \\ &= -h[2m\varepsilon - hI(\sigma)].\end{aligned}$$

On aurait donc pour  $h$  suffisamment petit  $\delta I < 0$ , ce qui est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus. On en conclut que l'ensemble des points de  $D$  où  $u(P) \leq V - 2\varepsilon$ , est au plus de mesure nulle. D'où il suit,  $\varepsilon$  étant arbitraire positif, que  $u(P)$  est  $\geq V$  en tout point de  $D$ , à l'exception au plus d'un ensemble de mesure nulle. Observons encore qu'il résulte d'un raisonnement analogue que  $u(P)$  est fini partout dans  $F$ .

Or nous allons voir qu'en réalité, le potentiel  $u(P)$  est  $= V$  en tout point de  $D$  sans exception. Dans le cas newtonien cela est évident pour les points intérieurs de  $D$ , car, le potentiel étant surharmonique, il est

<sup>12</sup>En réalité, il suffirait de supposer que l'ensemble  $E$  soit de capacité  $> 0$ , voir plus loin n° 31.

en chaque point  $P$  supérieur ou égal à la valeur moyenne prise dans une sphère quelconque entourant  $P$ , et cette moyenne est  $\geq V$  si la sphère est suffisamment petite. Dans le cas général on peut modifier ce principe de démonstration de manière à obtenir une méthode qui en même temps est applicable aux points frontières.

Soit  $P$  un point quelconque, à l'intérieur de  $D$  ou sur la frontière; d'après les hypothèses faites on peut toujours tracer un petit cône  $c$  avec ce point comme sommet et tout entier intérieur à  $D$ . De chaque sphère de centre  $P$  et suffisamment petite ce cône découpe une portion dont le volume est en rapport constant  $k$  ( $0 < k < 1$ ) avec le volume de la sphère. Soient  $S$  et  $s$  deux sphères de cette espèce dont les rayons  $R$  et  $r$ ,  $R > r$ , sont choisis de manière que

- 1° le potentiel  $u$  de la masse  $\mu'$  intérieure (non extérieure) à  $S$  soit  $< k\varepsilon/2A$  au point  $P$ ,  $A$  étant la constante figurant dans le lemme 2 (n° 15) et  $\varepsilon$  un nombre positif si petit que l'on veut;
- 2° le potentiel  $u''$  de la masse  $\mu''$  extérieure à  $S$  soit  $< u''(P) + \varepsilon/2$  en tout point de la sphère  $s$ . Cette dernière condition est évidemment remplie si pour  $R$  fixé,  $r$  est choisi suffisamment petit, puisque le potentiel  $u''$  est continu en  $P$ .

Désignons maintenant par  $m_{cs}$  la valeur moyenne du potentiel  $u$  dans la portion conique  $cs$ , et par des notations analogues les moyennes de  $u'$  et de  $u''$ . Nous avons,  $u$  étant  $\geq V$  en tout point de  $cs$  sauf au plus dans un ensemble de mesure nulle,

$$V \leq m_{cs} = m'_{cs} + m''_{cs} < m'_{cs} + u''(P) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or on a évidemment

$$m'_{cs} \leq \frac{1}{k} m'_s,$$

donc, d'après le lemme 2 et l'hypothèse 1° ci-dessus,

$$m'_{cs} \leq \frac{A}{k} u'(P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite,

$$V < u''(P) + \varepsilon$$

c'est-à-dire,

$$u(P) \geq u''(P) > V - \varepsilon.$$

Par conséquent, le potentiel  $u(P)$  est  $\geq V$  en tout point de  $D$  sans exception.

D'autre part,  $u(P)$  ne peut être  $> V$  en aucun point du noyau  $F$ . En effet, si cela avait lieu en un point  $P_1$  de  $F$ ,  $u(P)$  serait  $> V$  encore dans un entourage de  $P_1$ , et l'intégrale  $I(\mu)$  deviendrait nécessairement  $> V$ . Par conséquent,  $u(P)$  est constant  $= V$  en tout point de  $F$ .

Or appliquons maintenant le principe du maximum, valable, comme nous l'avons vu (n° 10), pour tous les indices  $\alpha \geq 1$ . Le potentiel  $u(P)$  étant constant, donc continu, sur l'ensemble parfait  $F$  qui porte la masse, il est continu encore comme fonction définie dans tout l'espace (n° 14, corollaire). Alors,  $u(P)$  atteignant son maximum dans l'ensemble  $F$ ,  $u(P) \leq V$  dans tout l'espace. Donc,  $u(P) = V$  en tout point de  $D$ . En résumé, la distribution  $\mu$  fournissant une solution du problème du minimum pour l'intégrale d'énergie  $I(\mu)$ , fournit en même temps une solution du problème d'équilibre. Le potentiel constant est égal au minimum de l'intégrale  $I(\mu)$ , et ce minimum est un vrai maximum pour le potentiel de la distribution d'équilibre.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que la solution est unique. Soit  $\mu_1$  une seconde distribution de la masse unité sur  $D$  dont le potentiel  $u_1$  est constant dans ce domaine. Comme

$$\int_D u_1(P) d\mu_1(P) = \int_D u_1(P) d\mu(P) = \int_D u(P) d\mu_1(P) = \int_D u(P) d\mu(P),$$

on a  $I(\mu_1) = I(\mu) = V$ . La différence  $\sigma = \mu_1 - \mu$  est une fonction d'ensemble à variation bornée, telle que l'intégrale double  $I(\sigma)$  est aussi bornée. De plus,

$$I(\sigma) = I(\mu_1) + I(\mu) - 2 \int_D d\mu_1(P) \int_D \frac{d\mu(Q)}{r_{PQ}^\alpha} = 2V - 2V = 0.$$

Donc,  $\sigma$  est identiquement nulle (n° 16), c'est-à-dire que  $\mu_1$  est identique à  $\mu$ . C. Q. F. D.

**18.** — La méthode employée ci-dessus pour démontrer l'existence d'une

distribution d'équilibre de la masse unité dans  $D$  ne donne aucun renseignement sur la question de savoir où cette masse se trouve *dans*  $D$  quand l'équilibre est atteint. Dans le cas newtonien seulement, pour  $\alpha = 1$ , on peut en dire davantage. En effet, le potentiel étant constant à l'intérieur de  $D$ , ses dérivées s'y annulent, et il suit de la formule classique de GAUSS qu'il n'y a ici aucune masse, c'est-à-dire que *la masse totale est répartie sur la frontière*; résultat qui ressort, aussi tout naturellement de la méthode du balayage, qui est applicable dans ce cas. Pour  $\alpha$  croissant de un à trois il faut imaginer que la masse s'étend de plus en plus vers l'intérieur de  $D$  pour tendre vers la distribution de densité constante, qui est atteinte dans le cas limite exclu  $\alpha = 3$ .

**19. Propriétés d'extremum.** — Indiquons encore une propriété du potentiel d'équilibre qui nous sera utile dans la suite:

*Parmi toutes les répartitions possibles de la masse unité dans  $D$ , la distribution d'équilibre est celle dont le potentiel a la plus petite borne supérieure ( $V$ ). Plus précisément, soit  $\mu_1$  une distribution quelconque de la masse unité dans  $D$ , non identique à la distribution d'équilibre  $\mu$ , la borne supérieure du potentiel  $u_1$  de est  $> V$ .*

En effet, on a d'après le lemme 3 (n° 16)

$$I(\mu_1) = \int u_1 d\mu_1 > V,$$

donc,  $u_1$  ne peut être constamment  $\leq V$ .

*Elle est encore la distribution dont le potentiel a la plus grande borne inférieure dans  $D$ . Ici l'énoncé plus précis n'est pas vrai.*

Cette assertion se démontre d'une manière analogue. On a

$$\int_D u_1 d\mu = \int_D u d\mu_1 = V,$$

donc, la borne inférieure de  $u_1$  est  $\leq V$  dans le noyau de masse relatif à  $\mu$ , c'est-à-dire que la borne inférieure de  $u_1$  est  $\leq V$  dans  $D$ . L'exemple évident du potentiel newtonien engendré par la masse unité, répartie uniformément sur la surface d'une sphère ou placée au centre de celle-ci, montre immédiatement que l'énoncé ne peut être précisé.

**20. Remarque.** — Il n'est peut-être pas sans intérêt de voir explicitement que la condition imposée  $\alpha \geq 1$  est essentielle pour la validité du théorème d'équilibre. En réalité, on peut énoncer la proposition suivante, qui contient même un peu plus que l'impossibilité d'une distribution d'équilibre dans un domaine fixé.

*Il est impossible de répartir une masse positive dans l'espace fini de manière que le potentiel d'ordre  $\alpha < 1$  soit constant dans un domaine spatial n'importe lequel.*

Pour le voir, il suffit de prouver que le potentiel  $u(P)$  d'ordre  $\alpha < 1$  dû à une distribution quelconque  $\mu$ , est surharmonique au sens restreint dans tout l'espace fini, c'est-à-dire que l'on a, avec les mêmes notations que dans le lemme 2 (n° 15),

$$m_S(P) < u(P),$$

l'égalité n'ayant jamais lieu. En effet, cela prouvé, il viendra immédiatement que  $u(P)$  ne peut être constant dans aucun domaine spatial.

Pour simplifier les calculs nous ne démontrerons pas directement l'inégalité ci-dessus, mais la relation correspondante pour la moyenne superficielle, ce qui revient au même. On peut évidemment encore réduire la question au cas où la sphère  $S$  a le rayon unité.<sup>13</sup> Nous aurons alors

$$\frac{1}{4\pi} \int_S dS_M \int_\omega \frac{1}{r_{MQ}^\alpha} d\mu(Q) = \int_\omega \frac{1}{r_{MQ}^\alpha} d\mu(Q) \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{r_{QP}}{r_{QM}} \right)^\alpha dS_M,$$

$dS_M$  désignant l'élément de surface au point  $M$ . Il s'agit alors de démontrer que

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{r_{QP}}{r_{QM}} \right)^\alpha dS_M < 1$$

pour toute position du point  $Q$  dans l'espace fini. Posons  $r_{PQ} = r$ , nous avons, en rapportant l'intégrale aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{r_{QP}}{r_{QM}} \right)^\alpha dS_M = \frac{r^\alpha}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + r^2 - 2r \cos \theta)^{\alpha/2}} \\ &= \frac{r^{\alpha-1} (1+r)^{2-\alpha} - |1-r|^{\alpha-2}}{2(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Cela revient à dire qu'on prend toujours la moyenne sur une sphère de rayon non nul.

En développant en série entière nous obtenons

$$\varphi(r) = r^\alpha \left[ 1 - \frac{(1-\alpha)\alpha}{3!} r^2 - \frac{(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{5!} r^4 - \dots \right]$$

pour  $r \leq 1$ , et

$$\varphi(r) = 1 - \frac{(1-\alpha)\alpha}{3!} \frac{1}{r^2} - \frac{(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{5!} \frac{1}{r^4} - \dots$$

pour  $r \geq 1$ . Par conséquent,  $\varphi(r) < 1$  pour tout  $r$  fini.

On sait que *le principe du maximum* élémentaire est vrai pour les potentiels d'ordre  $\alpha \geq 1$  et non vrai si  $\alpha < 1$ . Ce n'est aussi que pour assurer la validité de ce principe que nous avons employé la condition  $\alpha \geq 1$  dans notre démonstration du théorème d'équilibre. Le résultat que nous venons d'obtenir ne démontre pas que le principe du maximum est nécessaire pour que le problème d'équilibre soit possible, on le reconnaît, mais il est en faveur d'une hypothèse en ce sens.

### III. Mesures de capacité.

**21. Préliminaire.** — Le théorème fondamental de la distribution d'équilibre que nous avons établi dans le chapitre précédent, est susceptible d'une généralisation importante aux ensembles fermés et bornés quelconques, sans aucune condition supplémentaire sur les frontières. En effet, nous démontrerons plus loin (n° 31) qu'il existe même dans ce cas une distribution unique, analogue à la distribution d'équilibre, dont le potentiel est constant et égal à son maximum "presque partout" dans l'ensemble donné, mais il peut y avoir des points exceptionnels où le potentiel est plus petit. Les mots "presque partout" que nous avons employés ici, ne doivent pas être pris dans le sens de M. LEBESGUE (tout l'ensemble donné peut être de mesure nulle), mais ils se réfèrent à une mesure qui dans ces questions-ci est la mesure naturelle: *celle de la capacité*.

La notion de capacité tire son origine de la physique où elle est employée pour mesurer la puissance des conducteurs d'électricité comme porteurs de masse électrique (n° 13). On définit ici *la capacité électrostatique* d'un système de conducteurs, extérieurs les uns aux autres, comme le rapport, constant de la charge au potentiel d'équilibre (newtonien) qui correspond à celle-ci. La signification géométrique de la capacité est évidente: c'est le rayon du conducteur sphérique qui peut remplacer le système donné. C'est aussi la masse qu'il faut pour rendre le potentiel d'équilibre égal à l'unité.

**22. Capacité selon Wiener.** — Si nous voulons concevoir la capacité comme une *mesure d'ensemble*, la simple définition ci-dessus ne nous permet pas d'aller loin, car elle suppose la résolution du problème d'équilibre. C'est-à-dire que la, capacité n'est définie jusqu'ici que pour des ensembles très spéciaux, à savoir pour des domaines fermés dont les surfaces frontières sont suffisamment régulières. C'est M. WIENER<sup>1</sup> qui le premier a étendu la définition à un ensemble fermé et borné quelconque. Soit  $F$  un tel ensemble et désignons par  $T$  le domaine connexe extérieur à  $F$ . D'après M. WIENER on peut déterminer pour tout tel domaine une seule fonction harmonique  $u$ , qui dans le cas où la frontière est suffisamment régulière se confond avec la solution du problème de DIRICHLET pour  $T$ , avec les valeurs données un

---

<sup>1</sup>N. WIENER, Certain notions in potential theory, *Journ. of Math. Massachusetts Inst. of Technology*, Jan. 1924.

sur la frontière et nulle à l'infini (voir plus loin n° 41). D'ailleurs, cette fonction peut s'écrire comme le potentiel d'une simple couche sur  $F$  dont la masse totale est donnée par l'intégrale de GAUSS ( $n$  normale intérieure)

$$\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

prise sur une surface régulière enfermant l'ensemble donné. Dans le cas où il existe une distribution d'équilibre sur  $F$ , la valeur de l'intégrale est évidemment égale à la capacité de cet ensemble: s'il n'en est pas ainsi, M. WIENER définit la capacité par cette valeur.<sup>2</sup>

**23. Capacité selon de la Vallée Poussin.** — Il est clair que cette définition n'a de sens du moins directement que pour les ensembles fermés; pour parvenir aux ensembles non fermés, il faut ajouter des conventions supplémentaires. On pourrait poser, par exemple, que la capacité d'un ensemble arbitraire soit égale à la capacité de la fermeture; cependant, il nous semble que cette définition est peu naturelle.<sup>3</sup> M. DE LA VALLÉE POUSSIN a donc réalisé un progrès marqué quand il en a donné une nouvelle, plus directe et se rapportant, pour ainsi dire, au point de vue physique primordial. M. DE LA VALLÉE POUSSIN définit la capacité d'un ensemble borné, fermé ou non, comme "*la borne supérieure des charges qu'il peut soutenir sans que son potentiel dépasse l'unité*".<sup>4</sup> Or le savant géomètre prouve

<sup>2</sup>Pour la notion de capacité au sens de M. WIENER voir encore en particulier:

G. BOULIGAND, Sur le problème de Dirichlet, *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.*, 1925.

O. D. KELLOGG, On the classical Dirichlet problem for general domains, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. U. S. A.* **12** (1926).

—, *Foundations of potential theory*, Berlin 1929.

F. VASILESCO, Sur les singularités des fonctions harmoniques, *Journ. de Math.* **9** (1930).

M. BRELOT, Einige neuere Untersuchungen liber das Dirichletsche Problem, *Jahresber. der Deutsch. Mathem.-Vereinigung* **42** (1932). Cet ouvrage contient une bibliographie assez détaillée des recherches récentes sur le problème de Dirichlet et la notion de capacité.

<sup>3</sup>On serait conduit, par exemple, à attribuer une capacité positive à un ensemble dénombrable qui est partout dense sur un domaine, bien que dans toutes les questions dont il s'agit un tel ensemble joue le rôle d'un ensemble négligeable. Ainsi, toute répartition continue de masse dans l'espace s'annule sur un ensemble dénombrable (no 4).

<sup>4</sup>Mémoire cité plus haut (p. 10, note 2) dans les *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* **2** (1932), Note II, p. 226.

de plus, en se servant de la méthode du balayage, encore perfectionnée par lui, que sa définition est équivalente à celle de M. WIENER pour les ensembles *fermés*; elle en est par conséquent une généralisation directe.

**24. Diamètre transfini.** — A côté des recherches mentionnées plus haut, et d'une façon tout à fait différente, M. FEKETE<sup>5</sup> avait trouvé une mesure pour les ensembles fermés dans le plan qu'il appelait *le diamètre transfini* et qui joue un rôle important dans l'étude de certaines équations algébriques. D'après M. FEKETE cette quantité peut se définir de la manière suivante. Soient  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $n$  points quelconques dans l'ensemble fermé  $F$ ,  $n \geq 2$ , et désignons par  $d_n$  le maximum de la moyenne géométrique des  $\binom{n}{2}$  distances mutuelles  $r_{P_i P_j}$  quand les points  $P_i, P_j$  varient indépendamment l'un de l'autre dans  $F$ :

$$(1) \quad d_n = \max \binom{n}{2} \sqrt{\prod_{i < j} r_{P_i P_j}}.$$

Si l'on fait ici tendre  $n$  vers l'infini,  $d_n$  tend en décroissant vers une limite  $d$  positive ou zéro, et c'est justement cette limite qui sera le diamètre transfini de l'ensemble  $F$ .

Dans le cas particulier où le domaine infini  $T$  extérieur à  $F$  est simplement connexe, M. FEKETE prouvait, en s'appuyant sur un théorème de M. FABER<sup>6</sup> que le diamètre transfini est égal au rayon du cercle sur l'extérieur duquel on peut représenter ce domaine conformément, de manière que le point à l'infini et l'élément de longueur en ce point restent conservés. On pourrait aussi interpréter ce fait au moyen de la fonction de GREEN pour le domaine  $T$ , avec le pôle au point à l'infini,<sup>7</sup> et l'on trouverait immédiatement que *le diamètre transfini de  $F$  se confond avec la capacité de cet ensemble relativement au potentiel logarithmique dans le plan* (cf. n° 34). Or l'introduction de la fonction de GREEN est

<sup>5</sup>M. FEKETE, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Zeitschr.* **17** (1923).

<sup>6</sup>G. FABER, Über Tschebyscheffsche Polynome, *Journ. de Crelle* **150** (1919).

—, Potentialtheorie und konforme Abbildung, *Sitzungsber. der Bayerischen Akad. der Wiss.* 1920.

<sup>7</sup>On peut définir cette fonction par la méthode générale de M. WIENER, voir plus loin n° 41.

indépendante de la connexion de  $T$ ; on sera donc en droit d'espérer que le dernier résultat subsiste même si  $T$  est multiplesment connexe. Cette interprétation et l'extension au cas général que nous venons de signaler, furent faites par M. SZEGÖ<sup>8</sup> qui prouva que le diamètre transfini de  $F$  est égal à la constante de ROBIN pour  $T$ ,<sup>9</sup> c'est-à-dire en nos termes, à la capacité de  $F$ .

**25. Diamètre transfini généralisé.** — Plus récemment ces considérations ont été étendues à l'espace par MM. PÓLYA et SZEGÖ dans un Mémoire dans le *Journal de Crelle*<sup>10</sup> où l'on trouve une excellente exposition de diverses méthodes en vue de définir le diamètre transfini d'un ensemble fermé, soit dans le plan soit dans l'espace. Or on trouve aussi dans ce Mémoire une généralisation importante se rapportant au cas dont nous nous occupons ici, c'est-à-dire au cas correspondant à un potentiel généralisé d'indice quelconque. En effet, soit  $F$  un ensemble fermé dans l'espace ordinaire (pour fixer les idées) et  $\lambda$  un nombre réel, les auteurs cités définissent une quantité  $D_n^{(\lambda)}$  analogue à l'expression (1) du numéro précédent:

$$D_n^{(\lambda)} = \max_{P_i, P_j \subset F} \left[ \frac{\sum_{i < j} r_{P_i P_j}^\lambda}{\binom{n}{2}} \right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Pour  $n$  tendant vers l'infini  $D_n^{(\lambda)}$  tend en décroissant ainsi que les  $d_n$  vers une limite positive ou zéro  $D^{(\lambda)}$ , qui dans le cas particulier  $\lambda = -1$  est reconnue identique à la capacité newtonienne de  $F$ .

Nous n'entrerons pas dans la discussion détaillée du nombre  $D^{(\lambda)}$  pour des valeurs différentes du paramètre  $\lambda$ , ni dans l'étude des relations entre  $D^{(\lambda)}$  et la quantité analogue  $R^{(\lambda)}$ <sup>11</sup> (cf. cependant n° 28, remarque). Signalons seulement une inégalité que MM. PÓLYA et SZEGÖ ont démontrée en détail pour  $\lambda = -1$ . Supposons  $\lambda = -a < 0$  et soit  $\mu$  une répartition quelconque de la masse unité sur l'ensemble  $F$ , on a<sup>12</sup>

<sup>8</sup>G. SZEGÖ, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung etc., *Math. Zeitschr.* **21** (1924).

<sup>9</sup>Pour la définition de cette constante, voir l'ouvrage cité de M. SZEGÖ.

<sup>10</sup>G. PÓLYA et G. SZEGÖ, Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *Journ. de Crelle* **165** (1931).

<sup>11</sup>Pour la définition, voir Mémoire cité, p. 19.

<sup>12</sup>2 loc. cit., pp. 15 et 22. Les auteurs cités ne considèrent que des intégrales ordinaires,

$$(1) \quad (D^{(\lambda)})^\lambda \leq \iint_F r_{PQ}^\lambda d\mu(P) d\mu(Q) = I^{(\alpha)}(\mu).$$

D'autre part, plaçons la masse  $1/n$  en chacun des  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de  $F$  qui correspondent au maximum  $D_n^{(\lambda)}$  ci-dessus. Désignons cette répartition discontinue de la masse unité par  $\mu$ , on obtient facilement, avec des notations intelligibles (cf. n° 5),

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} r_{P_i P_j}^\lambda \geq \iint_F [r_{PQ}^\lambda]_N d\mu_n(P) d\mu_n(Q) - \frac{N}{n}.$$

En tenant  $N$  fixe nous faisons maintenant tendre  $n$  vers l'infini; alors, le premier terme tend évidemment vers  $(D^{(\lambda)})^\lambda$ , et la répartition  $\mu_n$  vers une répartition  $\mu^*$  (au besoin après un choix). On a par conséquent pour tout nombre  $N$ , la fonction  $[r_{PQ}^\lambda]_N$  étant continue bornée,

$$(D^{(\lambda)})^\lambda \geq \iint_F [r_{PQ}^\lambda]_N d\mu^*(P) d\mu^*(Q),$$

c'est-à-dire pour  $N \rightarrow \infty$

$$(D^{(\lambda)})^\lambda \geq \iint_F r_{PQ}^\lambda d\mu^*(P) d\mu^*(Q) = I^{(\alpha)}(\mu^*).$$

En comparant ceci avec (1) on obtient la proposition<sup>13</sup>:

*La quantité  $(D^{(\lambda)})^\lambda$  est pour  $\lambda < 0$  égale au minimum de l'intégrale d'énergie, correspondant à l'indice  $\alpha = -\lambda$ , pour toutes les répartitions de la masse unité sur  $F$ .*

Il est clair, d'après cela, que la distribution  $\mu^*$  est identique à la distribution d'équilibre (n° 17) sur  $F$  dans tous les cas où il y en a, c'est-à-dire dans l'espace ordinaire pour  $1 \leq \alpha < 3$  et la frontière de  $F$  suffisamment régulière.<sup>14</sup> Alors, le minimum  $W$  de l'intégrale d'énergie (n° 17, (1)) est égal au potentiel d'équilibre  $V$ , et à la valeur  $(D^{(-\alpha)})^{-\alpha}$ . En vertu de cela il serait donc naturel et conforme aux notations antérieures dans le cas

mais l'extension aux intégrales de Stieltjes est évidente.

<sup>13</sup>Cf. loc. cit., p. 22, où une proposition analogue est énoncée pour  $\lambda \geq 0$ .

<sup>14</sup>Ce fait a été énoncé par MM. PÓLYA et SZEGÖ comme hypothèse dans quelques cas particuliers; voir loc. cit., p. 42.

newtonien  $\alpha = 1$  de définir la valeur  $W^{-1/\alpha} = V^{-1/\alpha} = D^{(-\alpha)}$  comme la capacité d'ordre  $\alpha$  de l'ensemble fermé  $F$ .<sup>15</sup> Nous la désignerons par  $C^{(\alpha)}$ . Plus généralement, si le potentiel est déterminé par une fonction  $\Phi$ , remplissant les conditions que nous avons posées, dans le n° 7, on peut de la même façon définir une capacité  $C^{(\Phi)}$  relativement à cette fonction par l'équation correspondante

$$\Phi(C^{(\Phi)}) = \min \iint_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(P) d\mu(Q).$$

Cela revient à dire que  $C^{(\Phi)}$  est la valeur de la fonction inverse de  $\Phi$  pour le minimum de l'intégrale d'énergie quand la masse donnée est un. La signification si simple de la capacité newtonienne (n° 21) ne s'étend pas au cas général, mais  $C^{(\Phi)}$  est évidemment toujours une mesure linéaire non négative. On a par exemple pour une sphère de rayon  $R$ <sup>16</sup>

$$(2) \quad C^{(\alpha)} = R \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1 \leq \alpha < 3).$$

**26. Définition générale de la capacité.** — Il n'y a maintenant aucune difficulté pour étendre la définition aux ensembles bornés quelconques; on n'aura, en effet, qu'à répartir la masse unité sur l'ensemble donné de toutes les manières possibles et qu'à remplacer, s'il est nécessaire, dans les développements précédents le *minimum des intégrales d'énergie* par la borne inférieure.<sup>17</sup> Toutefois, il faut ici préciser davantage ce qui doit être entendu par une répartition d'une masse donnée  $m$  sur un ensemble qui peut être absolument quelconque.

*Nous dirons que  $\mu$  est une répartition de la masse positive  $m$  sur l'ensemble  $E$  si  $\mu$  est une fonction additive et non négative d'ensemble, par rapport à laquelle  $E$  est normal (n° 3) et telle que  $\mu(E) = m$  et  $\mu(\omega - E) = 0$ .*

<sup>15</sup>La définition est cependant en quelque mesure arbitraire; on pourrait aussi prendre  $1/V$  comme définition de la capacité, ce qui reviendrait à l'énoncé de M. DE LA VALLÉE POUSSIN (n° 23). Toutefois, l'extension au cas où  $1/V$  peut être nul ou négatif, p. ex. si  $\Phi(r) = \log(1/r)$ , entraîne dans ce cas des difficultés particulières.

<sup>16</sup>PÓLYA et SZEGÖ, loc. cit., p. 38. Cf. plus loin n° 28, remarque.

<sup>17</sup>Le minimum existe évidemment toujours si l'ensemble est fermé.

Ces précautions prises, nous donnerons la définition générale de la capacité  $C^{(\Phi)}$ , que nous désignerons souvent plus simplement par  $C$  s'il n'y a pas à s'y tromper:

*Pour toutes les répartitions possibles de la masse unité sur l'ensemble  $E$ , l'intégrale d'énergie, correspondant à la fonction déterminante  $\Phi$ , a une borne inférieure  $W_E$  finie ou infinie. La capacité  $C^{(\Phi)}(E) = C(E)$  de l'ensemble  $E$  sera définie par l'équation*

$$W_E = \Phi[C(E)].$$

Comme nous avons vu plus haut (n° 19), le potentiel d'équilibre jouit de la double propriété d'être en même temps un "minimum maximorum" et un "maximum minimorum". Nous allons profiter de la première de ces propriétés pour donner une nouvelle définition de la capacité, qui est équivalente à la précédente relativement à une fonction  $\Phi$  pour laquelle le problème d'équilibre est possible.

*Pour toute répartition possible de la masse unité sur l'ensemble  $E$  le potentiel a une borne supérieure, finie ou infinie positive. Désignons par  $V_E$  la borne inférieure, finie ou non, de ces bornes supérieures, si le problème d'équilibre est possible pour la fonction déterminante  $\Phi$ , on a  $V_E = W_E$  et la capacité est aussi donnée par l'équation*

$$V_E = \Phi[C(E)].$$

*En particulier, pour  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , on a*

$$C^{(\alpha)}(E) = \left( \frac{1}{V_E} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

*et cette formule fait voir immédiatement que la définition ci-dessus est identique à celle de M. DE LA VALLÉE POUSSIN dans le cas newtonien.*

**27.** Avant de prouver l'équivalence de ces deux définitions dans les cas signalés nous montrerons d'abord trois propriétés de la mesure de capacité, et cela en employant n'importe quelle définition.

1° Si l'ensemble  $E_1$  est contenu dans l'ensemble  $E_2$ , on a  $C(E_1) \leq C(E_2)$ .

Car  $W_{E_2} \leq W_{E_1}$ , et  $V_{E_2} \leq V_{E_1}$ , chaque distribution sur  $E_1$  étant en même temps une distribution sur  $E_2$ .

2° La capacité d'un ensemble  $E$  est la borne supérieure des capacités de tous les ensembles fermés contenus dans  $E$ .

C'est une conséquence presque immédiate de l'exigence que l'ensemble  $E$  soit normal relativement à toute répartition permise de la masse unité, car, en vertu de celle-ci il existe pour chaque distribution donnée un ensemble fermé  $F$  contenu dans  $E$  qui porte une masse  $> 1 - \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est arbitrairement petit. En écartant la masse qui pourrait se trouver hors de  $F$  on obtient une distribution sur  $F$  d'une masse  $> 1 - \varepsilon$ , et la démonstration s'achève dans les deux cas par quelques appréciations évidentes que nous pouvons nous dispenser de faire.

3° La somme d'une suite dénombrable d'ensembles mesurables  $B$  de capacité nulle est elle-même un ensemble de capacité nulle.<sup>18</sup>

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait répartir la masse unité sur l'ensemble  $E$ , somme des ensembles  $E_1, E_2, \dots$ , de manière que l'intégrale d'énergie due à cette répartition fût bornée (en admettant la première définition). La fonction de distribution  $\mu$  est additive au sens complet sur les  $E_i$ , supposés mesurables  $B$ , et satisfait à l'inégalité

$$1 = \mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots$$

Par suite,  $\mu$  est  $> 0$  au moins sur un des ensembles  $E_i$ , p. ex.  $E_1$ . Or si l'intégrale d'énergie due à la masse totale était bornée, il en serait de même de l'intégrale d'énergie due à la masse partielle  $\mu(E_1)$ , qui est répartie sur  $E_1$ , et l'on aurait  $C(E_1) > 0$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

<sup>18</sup>M. DE LA VALLÉE POUSSIN a énoncé la même proposition dans le cas newtonien mais sans préciser la nature des ensembles. Cependant, il nous semble qu'une certaine condition de mesurabilité est inévitable. Cf. la théorie de la mesure ordinaire où le théorème est valide sans restriction pour la mesure *extérieure* mais faux pour la mesure *intérieure*.

En substituant ci-dessus “le potentiel” à “l’intégrale d’énergie”, on obtient une démonstration valable pour la seconde définition.<sup>19</sup>

REMARQUE. Le même principe de démonstration peut être employé pour prouver que la masse partielle portée par un ensemble mesurable  $B$  de capacité nulle est toujours  $= 0$  si l’intégrale d’énergie (le potentiel) due à la masse totale est bornée.

**28. Ensembles fermés.** — L’identité des deux définitions de la capacité dans les cas dont il s’agit est maintenant une conséquence immédiate du théorème suivant:

THÉORÈME. *Si  $F$  est un ensemble fermé et borné,  $W_F = V_F$  et  $W_F$  est un vrai minimum de l’intégrale d’énergie. En particulier, pour  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  où  $\alpha$  est  $\geq 1$ , la distribution minimisante est identique à la distribution  $\mu^*$  obtenue plus haut (n° 25).*

Ce théorème est évident si l’ensemble  $F$  se compose d’un nombre fini de domaines fermés suffisamment réguliers. Car, dans ce cas, le problème d’équilibre peut, être résolu en vertu des hypothèses faites sur la fonction  $\Phi$  déterminant le potentiel, et le potentiel d’équilibre  $V = W_F$  est, comme nous savons, le maximum du potentiel dans tout l’espace, c’est-à-dire  $V = V_F = W_F$ .

La démonstration du théorème général se fait en approchant ensemble  $F$  par de tels domaines réguliers.<sup>20</sup> Construisons un réseau dans  $\omega$  et considérons les mailles d’un certain ordre  $n$  qui contiennent dans leur intérieur ou sur leur frontière au moins un point de  $F$ . Ces mailles forment en commun un ensemble fermé  $D_n$ , contenant  $F$ , qui se compose d’un nombre fini de domaines polyédriques. La frontière de ces domaines satisfait par conséquent aux conditions de régularité, suffisantes pour que le Problème d’équilibre puisse être résolu. La solution est une fonction d’ensemble  $\mu_n$  avec  $\mu_n(D_n) = 1$  et s’annulant sur le complémentaire. Appelons le potentiel d’équilibre  $V_{D_n}$ ; il est égal à la valeur  $W_{D_n}$  de l’intégrale

<sup>19</sup>La démonstration ne suppose pas essentiellement  $\Phi(r)$  positive. Pour  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$ , où  $\alpha$  est  $\geq 1$ , le théorème est contenu dans l’inégalité plus générale (n° 29):  $C(E_1 + E_2 + \dots) \leq C(E_1) + C(E_2) + \dots$

<sup>20</sup>La construction et le principe de démonstration sont les mêmes que ceux employés par M. DE LA VALLÉE POUSSIN dans son Mémoire souvent cité, voir Note II, p. 227.

d'énergie  $I(\mu_n)$ . Fais-ons tendre  $n$  vers l'infini, l'ensemble  $D_n$  tend vers l'ensemble  $F$  de manière que chaque point extérieur à  $F$  soit aussi extérieur à  $D_n$  pour  $n$  suffisamment grand. Les fonctions d'ensemble  $\mu_n$  tendent en conséquence vers une fonction d'ensemble  $\mu$  (en faisant au besoin un choix), avec  $\mu(F) = 1$  et  $\mu(\omega - F) = 0$ . C'est-à-dire que *cette fonction limite exprime une répartition de la masse unité sur l'ensemble  $F$* .

Puisque chacun des domaines  $D_1, D_2, \dots$  contient le suivant,

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n \supset D_{n+1} \supset \dots \supset F,$$

on a

$$\begin{aligned} V_{D_1} &\leq V_{D_2} \leq \dots \leq V_{D_n} \leq V_{D_{n+1}} \leq \dots \leq V_F; \\ W_{D_1} &\leq W_{D_2} \leq \dots \leq W_{D_n} \leq W_{D_{n+1}} \leq \dots \leq W_F. \end{aligned}$$

D'autre part, désignons par  $u(P)$  le potentiel de la distribution  $\mu$ ; puisque celle-ci est la limite des distributions  $\mu_n$  on a d'après les inégalités (2) du n° 8 et (1) du n° 12 et le fait que  $V_{D_n}$  est le maximum du potentiel de la distribution  $\mu_n$ ,

$$\begin{aligned} V_F &\leq \text{borne sup.}[u(P)] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_{D_n}; \\ W_F &\leq I(\mu) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} W_{D_n}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$V_F = W_F = I(\mu).$$

La distribution  $\mu$  obtenue par la construction précédente fournit par conséquent une solution du problème de minimum pour l'ensemble  $F$ . Or on a vu plus haut (n° 25) que la distribution  $\mu^*$  obtenue par la méthode de MM. PÓLYA et SZEGÖ est aussi une solution de ce problème quand  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$ , où  $\alpha$  est  $> 0$ . Donc, en particulier pour  $\alpha \geq 1$ , les distributions  $\mu$  et  $\mu^*$  sont identiques puisque  $I(\mu) = I(\mu^*) = W_F$  (n° 16). Il est clair que ce minimum peut être infini, à savoir dans le cas où  $C(F) = 0$ .

REMARQUE. Il est clair qu'on pourrait aussi donner une définition de la capacité en partant de la seconde propriété d'extremum du potentiel d'équilibre mentionnée dans le n° 19, mais il est douteux que l'on arrive de cette manière à la même mesure que plus haut pour un ensemble quelconque, car le raisonnement dans la démonstration du théorème ci-dessus ne s'applique plus.

On peut faire la même remarque quant à la relation entre les quantités  $D^{(\lambda)}$  et  $R^{(\lambda)}$  définies par MM. PÓLYA et SZEGÖ. *Toutefois, on est assuré que, si  $-3 < \lambda \leq -1$ , on a  $D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)}$  pour tout ensemble fermé, tel que le problème d'équilibre peut être résolu, c'est-à-dire pour tout ensemble fermé dont la frontière est suffisamment régulière.*<sup>21</sup>

**29. Une inégalité.** — La propriété 2° du n° 27 prouve que la capacité est une *mesure intérieure*, définie pour chaque ensemble borné. D'autre part, le théorème que nous venons de démontrer, prouve de même qu'elle est une sorte de *mesure extérieure* pour les ensembles bornés et *fermés*, qui à ce point de vue peuvent être considérées comme des ensembles mesurables relativement à la mesure de capacité. Toutefois, on ne doit pas oublier que la capacité n'est pas une mesure dans le sens ordinaire de ce mot; si par exemple  $E_1$  et  $E_2$  sont deux ensembles dont la distance de l'un à l'autre est positive, la relation

$$(1) \quad C(E_1 + E_2) = C(E_1) + C(E_2)$$

n'est pas vraie en général. D'autre part, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

*Pour la capacité d'ordre  $\alpha \geq 1$  on a l'inégalité*

$$[C(E_1 + E_2 + \dots)]^\alpha \leq [C(E_1)]^\alpha + [C(E_2)]^\alpha + \dots,$$

*pourvu que  $E_1, E_2, \dots$  soient des ensembles mesurables  $B$  en nombre fini ou dénombrable infini.*<sup>22</sup>

En effet, soit  $\mu$  une répartition de la masse unité sur l'ensemble  $E = E_1 + E_2 + \dots$  telle que la borne supérieure du potentiel soit  $< V_E + \varepsilon$  (cf. n° 26, deuxième définition). Le noyau  $1/r_{PQ}^\alpha$  étant toujours positif, le potentiel de la masse totale est toujours supérieur ou égal au potentiel de la masse partielle  $\mu(E_i) = m_i$  et la même inégalité a lieu pour les bornes supérieures de ces potentiels. Or,  $\mu(E_i)$  étant une répartition de la masse

<sup>21</sup>PÓLYA et SZEGÖ, loc. cit., p. 21-22.

<sup>22</sup>Pour la capacité newtonienne (dans le sens de M. WIENER) et pour un nombre fini d'ensembles le théorème se trouve énoncé dans le Livre de KELLOGG (exercice 1, p. 331).

Dans le cas du plan le théorème est encore valide pour  $\alpha < 1$ , cf. plus loin n° 34.

$m_i$  sur  $E_i$ , la borne supérieure du potentiel dû à cette masse est évidemment  $\geq m_i V_{E_i}$ . On a par conséquent

$$V_E + \varepsilon > m_i V_{E_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Divisons cette inégalité par  $V_{E_i}(V_E + \varepsilon)$  et faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro, nous aurons

$$\frac{1}{V_{E_i}} \geq \frac{1}{V_E} m_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

D'où il vient

$$\sum_i \frac{1}{V_{E_i}} \geq \frac{1}{V_E} \sum_i m_i \geq \frac{1}{V_E},$$

c'est-à-dire, par la définition de la capacité.

$$\sum_i [C(E_i)]^\alpha \geq [C(E)]^\alpha.$$

C. Q. F. D.

En appliquant l'inégalité de JENSEN<sup>23</sup> nous obtenons d'ailleurs comme conséquence immédiate,  $\alpha$  étant  $\geq 1$ ,

$$C(E) \leq \left\{ \sum_i [C(E_i)]^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_i C(E_i).$$

En tenant compte de la monotonie de  $C(E)$  (n° 27, 1°), le théorème établi montre tout de suite que l'égalité (1) ci-dessus est toujours vraie si l'un au moins des ensembles  $E_1$  ou  $E_2$  est de capacité nulle. C'est-à-dire que *la capacité d'un ensemble mesurable  $B$  n'est pas changée si l'on ajoute ou retranche un ensemble mesurable  $B$  de capacité nulle*. D'ailleurs, on peut facilement démontrer que cet énoncé est vrai quelle que soit la fonction  $\Phi(r)$ .

**30. Capacité newtonienne.** — Envisageons de plus près le cas particulier  $\alpha = 1$ . L'ensemble ouvert, complémentaire d'un ensemble fermé et

<sup>23</sup>J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.* **30** (1906).

borné  $F$ , se compose en général de plusieurs domaines connexes, mais il n'y en a qu'un seul qui contient le point à l'infini (cf. nos **22** et **24**). La frontière de ce domaine est un sous-ensemble fermé  $F'$  de  $F$ . A chaque distribution d'équilibre sur les domaines  $D_n$  considérés plus haut, la masse se répartit sur la frontière, comme nous le savons (n° **18**), et plus précisément, sur la frontière externe de  $D_n$ , en appelant ainsi l'ensemble qui délimite le domaine connexe infini. D'où il suit que la distribution limite est portée en tout par l'ensemble  $F'$ , que nous appellerons la frontière externe de  $F$ . Par conséquent,

$$C(F') = C(F),$$

c'est-à-dire, *la capacité newtonienne d'un ensemble fermé n'est pas changée si l'on ajoute ou retranche un ensemble de points intérieurs limité au dehors par cet ensemble fermé.*<sup>24</sup> Cette propriété importante ne s'étend pas au cas général.<sup>25</sup> Par exemple, la capacité d'ordre 2 de la surface d'une sphère est = 0 tandis que la capacité de la sphère totale est > 0.

---

<sup>24</sup>C. DE LA VALLÉE POUSSIN, loc. cit., Note II, p. 228.

<sup>25</sup>PÓLYA et SZEGÖ, loc. cit., p. 20.

## IV. Extensions du théorème d'équilibre.

### 1. Théorème d'équilibre pour un ensemble fermé et borné quelconque.

**31. Théorème.** — *Soit  $F$  un ensemble fermé et borné quelconque de capacité  $> 0$ , il existe une distribution unique de la masse unité sur  $F$  dont le potentiel est constant et égal à son maximum  $V_F$  en tout point de  $F$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle.<sup>1</sup>*

En effet, considérons la distribution  $\mu$  obtenue par le procédé limite, décrit ci-dessus dans le n° 28, et son potentiel  $u(P)$ . On a, d'une part  $u(P) \leq V_F$ , d'autre part

$$I(\mu) = \int_F u(P) d\mu(P) = V_F;$$

par conséquent,

$$u(P) = V_F$$

en tout point de  $F$  sauf au plus dans un ensemble  $E$  mesurable  $B$  contenu dans  $F$ , sur lequel  $\mu$  s'annule. Donc, en employant la méthode de variation de GAUSS (n° 17), on voit que si la capacité de  $E$  était  $> 0$ , on pourrait transporter une portion de la masse à cet ensemble et la répartir sur celui-ci, de manière que l'intégrale d'énergie correspondante fût bornée. On aurait par conséquent une distribution  $\mu'$  avec

$$I(\mu') < I(\mu),$$

ce qui est impossible. Donc, l'ensemble exceptionnel  $E$  est nécessairement de capacité nulle, et la distribution  $\mu$  est une solution du problème posé. Elle est aussi la seule, comme on le démontre de la même façon que dans le n° 17, en remarquant que la masse portée par un ensemble de capacité nulle est  $= 0$  si l'intégrale d'énergie est bornée (n° 27, remarque).

*En résumé, la distribution  $\mu$  ne dépend pas des domaines approchants  $D_n$  par lesquels elle est obtenue, mais est uniquement déterminée par*

---

<sup>1</sup>Nous entendrons toujours la capacité relativement à la fonction  $\Phi(r)$  par laquelle le potentiel est déterminé, en supposant le problème d'équilibre possible pour cette fonction.

*l'ensemble  $F$  lui-même et pourrait aussi s'obtenir en variant l'intégrale d'énergie.* Les propriétés du potentiel dû à cette distribution nous mettent en droit de l'appeler la distribution d'équilibre de la masse unité sur l'ensemble  $F$ . La capacité d'un ensemble fermé a alors exactement la même signification que la capacité d'un domaine satisfaisant à la condition de POINCARÉ.

### 32. Densité capacitaire et condition de Poincaré généralisée. —

Nous préciserons encore le théorème précédent en donnant une condition *suffisante* pour que le potentiel de la distribution d'équilibre prenne sa plus grande valeur  $V$  en un point  $P$  de l'ensemble  $F$ . A cet effet, introduisons la *densité capacitaire* d'un ensemble spatial  $E$  en un point quelconque  $P$ . Soit  $s$  une sphère (fermée) de centre  $P$  et de rayon  $r$ ,  $Es$  le sous-ensemble de  $E$  contenu dans  $s$ , nous définissons la *densité capacitaire supérieure* par la limite

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{C(Es)}{C(s)}$$

et de la même façon la *densité capacitaire inférieure*, en remplaçant lim-sup par liminf. Si la limite existe, elle sera appelée tout simplement la densité capacitaire de l'ensemble  $E$  au point  $P$ . Il est clair que les nombres ainsi définis dépendent de la fonction déterminante  $\Phi$ . Nous supposons ici  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  avec  $1 \leq \alpha < 3$ .<sup>2</sup>

Démontrons d'abord un lemme.

LEMME. *Le potentiel d'une distribution positive est en chaque point  $P$  égal à la plus petite des limites du potentiel  $u(M)$  quand  $M$  tend vers  $P$  en restant dans un ensemble quelconque  $E$  dont la densité capacitaire supérieure est  $> 0$  en ce point.*<sup>3</sup>

Dans la démonstration du théorème d'équilibre pour les domaines satisfaisant à la condition de POINCARÉ, nous avons vu qu'on peut conclure la valeur du potentiel en un point  $P$  de la moyenne des valeurs prises dans un petit cône ayant ce point comme sommet (n° 17). Le lemme ci-dessus en

<sup>2</sup>On pourrait évidemment aussi définir la densité d'un ensemble  $E$  relativement à un autre ensemble  $E_1$  arbitraire. Remarquons encore que la densité capacitaire d'ordre  $\alpha < 3$  est toujours  $> 0$  si la densité spatiale ordinaire est  $> 0$ .

<sup>3</sup>On aurait un énoncé équivalent en disant "... un ensemble quelconque  $E$  qui n'a pas la densité nulle en ce point".

est évidemment une généralisation, le cône étant remplacé par un ensemble  $E$  dont la densité capacitaire supérieure est  $\geq \delta > 0$  en  $P$ . D'ailleurs, on peut supposer que  $E$  ne contienne pas ce point même. On a en vertu de la semicontinuité,  $M$  désignant un point variable dans l'ensemble  $E$ ,

$$(1) \quad u(P) \leq \liminf_{M \rightarrow P} u(M).$$

La proposition est alors évidente si  $u(P) = +\infty$ . Supposons donc  $u(P) < K$  et décrivons deux sphères  $S$  et  $s$  de centre  $P$ , dont les rayons  $R$  et  $r$  peuvent être si petits que l'on veut mais toujours en rapport constant l'un à l'autre:

$$r/R = \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est un nombre positif arbitraire  $< 1$ . D'où il vient immédiatement pour tout point  $M$  dans la sphère intérieure, les notations étant les mêmes qu'à l'endroit cité et  $O$  désignant le symbole de LANDAU (cf. n° 14, corollaire),

$$\begin{aligned} u''(M) &= \int_{\omega-s} \frac{1}{r_{MQ}^\alpha} d\mu''(Q) = \int_{\omega-s} \left( \frac{r_{PQ}}{r_{MQ}} \right)^\alpha \frac{1}{r_{MQ}^\alpha} d\mu''(Q) \leq \left( \frac{R}{R-r} \right)^\alpha u''(P) \\ &= u''(P) + \varepsilon \alpha u''(P) + \dots \\ &= u''(P) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Choisissons maintenant le rayon  $R$  si petit que

$$u'(P) < \varepsilon^{1+\alpha};$$

alors, puisque

$$u'(P) \geq \mu'/R^\alpha,$$

on a

$$\mu' < \varepsilon(\varepsilon R)^\alpha = \varepsilon r^\alpha.$$

Supposons encore que les capacités d'ordre  $\alpha$  de l'ensemble  $Es$  et de la sphère  $s$  aient un rapport  $> \delta/2$  l'une à l'autre, ce qu'on peut toujours atteindre d'après les hypothèses faites. Alors, nous pouvons répartir la masse unité sur l'ensemble  $Es$  de manière que le potentiel  $u_1$  de cette distribution  $\mu_1$  soit  $< 2V_i$ , où

$$V_1 = \frac{1}{[C^{(\alpha)}(Es)]^\alpha} < \frac{1}{\left[\frac{\delta}{2} C^{(\alpha)}(s)\right]^\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2} \Gamma_\alpha r\right)^\alpha},$$

$\Gamma_\alpha$  étant une constante numérique.<sup>4</sup>

Formons maintenant “la moyenne”

$$\int_{E_s} u \, d\mu_1 = \int_{E_s} u' \, d\mu_1 + \int_{E_s} u'' \, d\mu_1.$$

D’après ce qui vient d’être dit, on a

$$\begin{aligned} \int_{E_s} u' \, d\mu_1 &= \int_S u_1 \, d\mu' < 2V_1\mu' < \frac{2\varepsilon r^\alpha}{\left(\frac{\delta}{2}\Gamma_\alpha r\right)^\alpha} = O(\varepsilon); \\ \int_{E_s} u'' \, d\mu_1 &= u''(P) + O(\varepsilon); \end{aligned}$$

c’est-à-dire,

$$\int_{E_s} u \, d\mu_1 < u''(P) + O(\varepsilon) \leq u(P) + O(\varepsilon).$$

Par conséquent, il existe au moins un point  $M_1$  dans  $E_s$  tel que

$$u(M_1) < u(P) + O(\varepsilon).$$

Faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro, nous obtenons

$$u(P) \geq \liminf_{M \rightarrow P} u(M).$$

L’inégalité opposée (1) montre alors que l’égalité seule est possible.

Ce lemme étant prouvé, le théorème suivant en est une conséquence immédiate.

**THÉORÈME.** *Le potentiel de la distribution d’équilibre prend sa plus grande valeur  $V$  en tout point où la densité capacitaire supérieure de l’ensemble donné  $F$  est  $> 0$ .*

En effet, soit  $E$  l’ensemble contenu dans  $F$  où  $u(P) = V$ . Puisque, d’après le théorème du numéro précédent,  $C(F - E) = 0$ , l’ensemble  $E$ , qui est mesurable  $B$ , a en chaque point  $P$  la même densité capacitaire que  $F$  (cf. n° 29). En particulier, si cette densité supérieure est  $> 0$ , on a d’après le lemme démontré,  $M$  étant un point variable dans  $E$ ,

$$u(P) = \liminf_{M \rightarrow P} u(M) = V.$$

---

<sup>4</sup>Cf. la formule (2) du n° 25.

Ce théorème fait voir que *l'ensemble des points exceptionnels de  $F$  où  $u(P) < V$ , est contenu dans l'ensemble des points de  $F$  où la densité capacitaire de  $F$  est égale à zéro.*<sup>5</sup>

## 2. Problème dans le plan.

**33. Potentiel logarithmique.** — Les problèmes que nous venons de traiter dans l'espace ordinaire ont des parallèles dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, et les solutions sont analogues. Cependant, le plan offre un intérêt particulier parce que, dans ce cas, le noyau harmonique, correspondant au noyau newtonien  $1/r$  est  $\log(1/r)$  et celui-ci n'est pas constamment positif. En conséquence, le lemme 3 (n° **16**) n'est pas vrai pour le logarithme, au moins sous sa forme la plus générale. Mais nous observons que dans les applications il suffit de considérer des distributions  $\sigma$  de masses algébriquement  $= 0$ , et *pour une telle distribution le théorème reste encore valide.* En effet, on a

LEMME 3'. *Soit  $\sigma$  une distribution d'une masse algébriquement nulle sur un domaine borné, l'intégrale double*

$$I(\sigma) = \iint_{\omega} \log \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(P) d\sigma(Q),$$

*supposée existante au sens absolu, est toujours  $\geq 0$ , l'égalité n'ayant lieu que si  $\sigma$  s'annule identiquement.*

Remarquons d'abord que l'énoncé du théorème est indépendant du nombre de dimensions de l'espace dans lequel la masse est supposée répartie. Nous ferons la démonstration dans l'espace ordinaire, une distribution  $\sigma$  dans le plan n'est alors qu'un cas particulier.

Soit  $S$  une sphère dont le rayon  $R$  est supposé très grand, on trouve facilement

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{PM}^{3/2}} \frac{1}{r_{MQ}^{3/2}} d\tau_M = \log \frac{R}{r_{PQ}} + c + O\left(\frac{r_{PQ}}{R}\right),$$

---

<sup>5</sup>On voit facilement que, pour  $\alpha = 1$ , cet énoncé est contenu dans la condition nécessaire et suffisante pour la régularité d'un point frontière, due à M. WIENER; voir note 1, p. 78. — Cf. G. C. EVANS, Potentials of positive mass II., *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **38** (Sept. 1935), p. 232.

$c$  étant une constante numérique et  $O$  le symbole de LANDAU. D'où il vient

$$\log \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r_{PM}^{3/2}} \frac{1}{r_{MQ}^{3/2}} d\tau_M - \log R - c + O\left(\frac{r_{PQ}}{R}\right).$$

Multiplions par  $d\sigma(P) d\sigma(Q)$  et intégrons sur toute la masse, nous avons

$$-(\log R + c) \int_{\omega} d\sigma(P) d\sigma(Q) = 0,$$

puisque, par hypothèse,

$$\int_{\omega} d\sigma(Q) = 0.$$

Alors, l'interversion de l'ordre des intégrations étant légitime,

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \log \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(P) d\sigma(Q) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} d\sigma(P) d\sigma(Q) \int_S \frac{1}{r_{PM}^{3/2}} \frac{1}{r_{MQ}^{3/2}} d\tau_M + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{3/2}} \right]^2 d\tau_M + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

Faisons tendre  $R$  vers l'infini<sup>6</sup>, nous aurons

$$\int_{\omega} \log \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(P) d\sigma(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{3/2}} \right]^2 d\tau_M \geq 0.$$

L'intégrale

$$u^{(3/2)}(M) = \int_{\omega} \frac{d\sigma(Q)}{r_{MQ}^{3/2}}$$

existe presque partout et s'annule à l'infini au moins de l'ordre  $3/2 + 1$  (puisque  $\sigma = 0$  algébriquement), l'intégrale de volume a donc toujours un sens. Si elle est nulle,  $u^{(3/2)}(M)$  s'annule presque partout et la démonstration s'achève comme dans le lemme 3.

Les autres lemmes se traduisent sans peine ainsi que les méthodes de démonstration. Nous nous contentons d'énoncer le théorème le plus important.

---

<sup>6</sup>Dans le travail de M. RIESZ, cité dans l'Introduction, on trouvera une autre démonstration de cette formule.

**34. Théorème d'équilibre dans le plan.** — Soit  $F$  un ensemble fermé et borné quelconque dans le plan, de capacité  $> 0$  par rapport à  $\Phi(r)$ , il existe une distribution unique de la masse unité sur  $F$  dont le potentiel par rapport à  $\Phi(r)$  est constant et égal à son maximum en tout point de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. L'ensemble des points exceptionnels de  $F$  est contenu dans l'ensemble où la densité capacitaire de  $F$  est égale à zéro.

Ici on peut avoir  $\Phi(r) = 1/r^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 2$ , ou encore  $\Phi(r) = \log(1/r)$  (cf. n° 10). Dans le cas logarithmique toute la masse est répartie sur la frontière externe de  $F$  (cf. n° 30); pour  $\alpha$  croissant de zéro à deux, la masse tend de plus en plus vers l'intérieur pour atteindre la distribution uniforme dans le cas exclu  $\alpha = 2$ . La distribution d'équilibre, solution du problème posé, est celle qui rend l'intégrale d'énergie minimum.

**35. Projection stéréographique.** — Dans les applications à la théorie des fonctions d'une variable complexe nous aurons souvent à considérer des ensembles contenant le point à l'infini et il faudrait dans ce cas une extension de la notion de capacité. Cependant, on peut éviter toute difficulté en effectuant une projection stéréographique du plan complexe sur la sphère de RIEMANN et en mesurant la capacité des ensembles, dont il s'agit, sur cette surface. La distance de deux points complexes  $a$  et  $b$  se définit alors par la distance euclidienne des points correspondants sur la sphère, et est donnée par la formule

$$[a, b] = \frac{|a - b|}{\sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}},$$

en supposant que la sphère ait le diamètre  $un$  et qu'elle soit tangente à l'origine au plan complexe. Cette distance, appelée *la distance cordale* de  $a$  à  $b$ , est toujours  $\leq 1$ .

Un ensemble donné sur la sphère peut toujours être considéré comme un ensemble situé dans l'espace ordinaire à trois dimensions, et la capacité par rapport à une certaine fonction déterminante  $\Phi(r)$  se définit par la méthode générale décrite plus haut. Or, on doit observer qu'au fond il ne s'agit pas ici d'ensembles spatiaux, mais superficiels, et conformément à cela le théorème de la distribution d'équilibre et les deux définitions de la capacité s'étendent aux mêmes fonctions  $\Phi(r)$  que dans le cas du plan.

Pour fixer les idées, considérons le potentiel logarithmique sur la sphère. Le principe du maximum pour les potentiels continus, qui est d'une importance capitale dans la démonstration du théorème d'équilibre, ne serait pas valide si l'on considérait le potentiel logarithmique comme une fonction dans tout l'espace, parce que cette fonction n'est pas sousharmonique dans ce domaine étendu. Au contraire, si les masses sont réparties sur la surface d'une sphère et si l'on suppose que le potentiel correspondant ne soit défini que sur cette surface, le principe du maximum sera encore valide. Pour le voir, il suffit évidemment de montrer que  $\log \frac{1}{|a,b]}$  est une fonction sousharmonique de l'une des variables  $a$  ou  $b$ . Posons  $a = 0$  et  $b = x + iy$ , nous avons

$$\Delta \frac{1}{2} \log \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \geq 0,$$

ce qui démontre la proposition. Il n'offrirait maintenant aucune difficulté de refaire toutes les démonstrations plus haut et de constater que les théorèmes fondamentaux concernant le potentiel d'équilibre subsistent. Nous pouvons nous en dispenser, les indications ci-dessus étant suffisantes pour faire ressortir le principe.

Ajoutons encore la remarque évidente, mais importante dans les applications, qu'un ensemble de points dans le plan complexe est de capacité nulle ou non par rapport à une certaine fonction  $\Phi(r)$  en même temps que l'ensemble de projection sur la sphère de RIEMANN est de capacité nulle ou non par rapport à cette même fonction.

REMARQUE. Les considérations précédentes laissent paraître une généralisation possible de la notion de potentiel et de capacité aux espaces avec une métrique non-euclidienne, dont celle de la sphère de RIEMANN n'est qu'un cas particulier. Il faut s'attendre à ce que la méthode générale de GAUSS puisse s'appliquer dans ce cas encore pour prouver l'existence d'un potentiel d'équilibre, sous des hypothèses analogues à celles qu'on a faites plus haut. Il importe surtout que le principe du maximum reste valide.

## V. Méthode du balayage et principe du maximum.

**36. Préliminaire.** — La méthode de variation de GAUSS, dont nous nous sommes servi pour établir l'existence d'une distribution d'équilibre, n'est qu'un cas particulier d'une méthode plus générale par laquelle l'illustre mathématicien crut résoudre le problème général de distribution quand les valeurs du potentiel sont données à l'avance sur une surface. En particulier, GAUSS a considéré le problème important que nous appelons aujourd'hui depuis POINCARÉ "*la méthode du balayage*", et qui consiste à substituer une répartition de masses données dans un certain domaine par une répartition sur la frontière de celui-ci, de manière que le potentiel reste conservé dans le domaine complémentaire.<sup>1</sup> Toutefois, on peut ici faire les mêmes objections que dans la démonstration du théorème d'équilibre, mais nous allons voir que les considérations de GAUSS peuvent être rendues rigoureuses encore dans ce cas.

Nous ne résoudrons le problème du balayage que pour le potentiel ordinaire dans l'espace. Quant aux potentiels généralisés dans un espace à un nombre quelconque de dimensions nous nous contenterons d'établir un balayage moins précis, mais qui nous suffira pour prouver le principe général du maximum, signalé déjà dans le n° 10. Nous nous servirons d'ailleurs de ce principe pour arriver au balayage ordinaire.

**37. Balayage (imprécis) dans le cas général.** — *Soit  $F$  un ensemble fermé et borné quelconque de capacité  $> 0$  par rapport à une fonction  $\Phi(r)$  telle que le problème d'équilibre soit possible dans l'espace considéré. Alors, si la masse unité est placée en un point  $M$  de l'ensemble complémentaire, il est possible de transporter cette masse du point  $M$  à l'ensemble  $F$  et de la répartir sur celui-ci, de manière que le nouveau potentiel soit  $\geq \Phi(r_{MP})$  en tout point de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle.*

En effet, considérons avec GAUSS l'intégrale

$$G(\mu) = \int_F \left\{ \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q) - 2\Phi(r_{MP}) \right\} d\mu(P)$$

---

<sup>1</sup>C. F. GAUSS, loc. cit., p. 240.

$$= \iint_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(P) d\mu(Q) - 2 \int_F \Phi(r_{MP}) d\mu(P)$$

où  $\mu$  désigne une distribution quelconque de la masse unité sur  $F$ . Pour toutes les répartitions possibles, cette intégrale a une borne inférieure  $g$ , qui est évidemment finie, et il existe une suite de répartitions  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  qui convergent vers une répartition limite  $\mu_M$  en même temps que les valeurs correspondantes  $G(\mu_1), G(\mu_2), \dots, G(\mu_n), \dots$  tendent vers ladite borne. On a maintenant, d'une part, d'après l'inégalité (1) du n° 12,

$$\iint_F \Phi(r_{PQ}) d\mu_M(P) d\mu_M(Q) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_F \Phi(r_{PQ}) d\mu_n(P) d\mu_n(Q);$$

d'autre part, puisque  $\Phi(r_{MP})$  est une fonction continue et bornée sur  $F$ ,

$$\int_F \Phi(r_{MP}) d\mu_M(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F \Phi(r_{MP}) d\mu_n(P),$$

Par conséquent,

$$g \leq G(\mu_M) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} G(\mu_n) = g,$$

donc,

$$G(\mu_M) = g,$$

c'est-à-dire que  $\mu_M$  est une distribution qui rend l'intégrale  $G(\mu)$  minimum.

Désignons maintenant par  $F'$  le noyau de masse relatif à la distribution  $\mu_M$ ; c'est un ensemble fermé, contenu dans  $F$ , qui est nécessairement de capacité  $> 0$ , puisque  $G(\mu_M)$  est finie. Soit  $\delta\mu_M = \varepsilon\sigma$  un déplacement quelconque de la masse répartie sur  $F'$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \delta G(\mu_M) &= 2\varepsilon \int_F \left\{ \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q) - 2\Phi(r_{MP}) \right\} d\mu(P) \\ &+ \varepsilon^2 \iint_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(P) d\mu(Q). \end{aligned}$$

On en conclut de la même façon que dans la démonstration du théorème d'équilibre (n° 17) que

1° la différence

$$h(P) = \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu_M(Q) - \Phi(r_{MP})$$

est égale à une constante  $\gamma$  en tout point de  $F'$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, la constante étant égale à la borne supérieure de  $h(P)$  sur  $F'$ ;

2°  $h(P)$  est  $\geq \gamma$  en tout point de  $F'$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle.

Notre théorème sera alors prouvé si nous montrons que  $\gamma$  est  $\geq 0$ . A cet effet, considérons la distribution d'équilibre  $\mu'$  de la masse unité sur  $F'$ . Le potentiel dû à  $\mu'$  est constant ( $= V'$ ) en tout point de  $F'$  sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. Cet ensemble est mesurable  $B$  et ne peut porter une masse non nulle (n° 27, remarque); nous obtenons par conséquent en intégrant  $h(P)$  par rapport à  $\mu'$

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_{F'} h(P) d\mu'(P) = \int_{F'} d\mu'(P) \int \Phi(r_{PQ}) d\mu_M(Q) - \int_{F'} \Phi(r_{MP}) d\mu'(P) \\ &= \int_{F'} d\mu_M(Q) \int_{F'} \Phi(r_{QP}) d\mu'(P) - \int_{F'} \Phi(r_{MP}) d\mu'(P) \\ &= V' - \int_{F'} \Phi(r_{MP}) d\mu'(P). \end{aligned}$$

Or, comme nous savons, le potentiel dû à la distribution d'équilibre sur un ensemble fermé est toujours inférieur ou égal à la valeur constante admise dans l'ensemble. Donc,  $\gamma \geq 0$ . C. Q. F. D.

**38. Principe du maximum.** — Nous avons déjà employé à plusieurs reprises le principe élémentaire du maximum (n° 10): Si le potentiel d'une distribution positive est *continu*, il atteint son maximum (=sa borne supérieure) en un point du noyau de masse, supposé que  $\delta\Phi(r) \geq 0$ . Si le potentiel est *discontinu*, il peut arriver que cette borne devient inaccessible, et il n'est alors nullement sûr *a priori* que la borne supérieure du potentiel hors des masses soit majorée par la borne supérieure dans le noyau. Cependant, le principe du balayage énoncé dans le numéro précédent nous met en état de prouver cette supposition.

THÉORÈME 1. *Si le potentiel  $u(P)$  d'une distribution positive  $\mu$ , est  $\leq K$  en tout point du noyau de masse relatif à  $\mu$ , on a  $u(P) \leq K$*

partout.<sup>2</sup>

Désignons le noyau par  $F$  et supposons que la masse répartie sur cet ensemble soit  $= 1$ . On a alors (cf. n° 26)

$$W_F \leq I(\mu) = \int_F u(P) d\mu(P) \leq K,$$

l'ensemble  $F$  est par conséquent de capacité  $> 0$ . On a ensuite, d'après la méthode du balayage,  $M$  étant un point quelconque de  $\omega - F$  et  $P$  un point de  $F$ ,

$$\Phi(r_{MP}) \leq \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu_M(Q)$$

sauf au plus dans un ensemble de points  $P$  de capacité nulle. Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_F \Phi(r_{MP}) d\mu(P) \leq \int_F d\mu(P) \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q) \\ &= \int_F d\mu(Q) \int_F \Phi(r_{PQ}) d\mu(P) \\ &\leq K \int_F d\mu_M(Q) = K. \end{aligned}$$

On a ici toujours négligé un ensemble de capacité nulle, ce qui est légitime, puisqu'un tel ensemble ne porte aucune masse. En tenant compte du caractère local du potentiel on peut encore énoncer le théorème suivant, qui est une conséquence immédiate du précédent.

**THÉORÈME 2.** *Désignons par  $Q$  un point frontière du noyau  $F$ , par  $P$  et  $M$  deux points variables, l'un dans  $F$  l'autre dans  $\omega - F$ , on a l'inégalité*

$$\limsup_{M \rightarrow Q} u(M) \leq \limsup_{P \rightarrow Q} u(P).$$

En effet, décrivons deux sphères  $s$  et  $S$  de centre  $Q$ , l'une intérieure à l'autre, et désignons par  $u_s, u_{S-s}$  etc. les potentiels provenant des masses portées respectivement par les ensembles  $s, S - s$  etc., où l'on peut supposer

<sup>2</sup>Dans le cas newtonien ce théorème et le suivant sont démontrés par M. A. J. MARIA, The potential of a positive mass and the weight function of Wiener, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. U. S. A.* **20** (1934).

les sphères  $s$  et  $S$  fermées. Alors, en admettant  $u(Q)$  fini,<sup>3</sup> on peut choisir les rayons de  $s$  et de  $S$  si petits que l'on ait en même temps  $u_S(Q) < \varepsilon$  et  $|u_{\omega-S}(N_1) - u_{\omega-S}(N_2)| < \varepsilon$ ,  $N_1$  et  $N_2$  étant deux points arbitraires dans  $s$ . D'après le théorème précédent on a maintenant,  $P_1$  étant un point convenablement choisi dans  $F_s$ ,

$$\begin{aligned} u_s(M) &\leq \text{borne sup.}\{u_s(P)\} < u_s(P_1) + \varepsilon \leq u_S(P_1) + \varepsilon; \\ \lim_{M \rightarrow Q} u_{S-s}(M) &= u_{S-s}(Q) \leq u_S(Q) < \varepsilon; \\ u_{\omega-S}(M) &< u_{\omega-S}(P_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\limsup_{M \rightarrow Q} u(M) \leq u(P_1) + 3\varepsilon.$$

Donc,

$$\limsup_{M \rightarrow Q} u(M) \leq \limsup_{P \rightarrow Q} u(P).$$

**39. Balayage dans le cas newtonien.** — *Soit  $T$  un domaine connexe dans l'espace ordinaire, dont la frontière est un ensemble fermé et borné  $F$  de capacité newtonienne  $> 0$ . Alors, toute répartition de masse positive dans  $T$  peut être remplacée d'une manière unique par une répartition positive sur  $F$  de façon que le potentiel reste conservé en tout point extérieur à  $T + F$  et en tout point de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. Dans cet ensemble et dans le domaine  $T$  le potentiel n'est jamais augmenté.*

Nous démontrons d'abord qu'on peut de cette façon balayer la masse unité placée en un point  $M$  de  $T$ , et le résultat général s'obtient ensuite facilement. Supposons en premier lieu que  $T$  soit un domaine s'étendant à l'infini et désignons par  $D$  l'ensemble fermé et borné qui est complémentaire à  $T$ ; l'ensemble  $F$  est par conséquent la frontière externe (n° 30) de celui-ci. Nous n'avons alors qu'à refaire les raisonnements du n° 37 relativement à  $D$  et à  $M$ , avec la seule modification que la masse répartie sur  $D$  n'est pas l'unité mais une masse positive  $m$  dont nous fixerons la grandeur dans un instant. La différence

$$h(P) = \int_D \frac{1}{r_{PQ}} d\mu_M(Q) - \frac{1}{r_{MP}}$$

<sup>3</sup>Pour  $u(Q) = +\infty$ , le théorème est évident, toute valeur limite au point  $Q$  étant infinie.

est, comme plus haut, égale à une constante  $\gamma$  en tout point du noyau  $D'$  relatif à  $\mu_M$ , à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle où elle peut être plus petite. D'ailleurs, on a en tout point de  $D$ , avec la même exception,  $h(P) \geq \gamma$ . Nous savons déjà que la constante  $\gamma$  est non négative si la masse  $m$  répartie sur  $D$  est l'unité; dans le cas actuel nous pouvons encore préciser cette assertion en donnant une expression explicite de  $\gamma$  pour tout  $m$  suffisamment grand. A cet effet, désignons par  $\nu$  la distribution d'équilibre sur  $D$ , c'est-à-dire sur  $F$  (cf. n° 30), d'une masse égale à la capacité de cet ensemble, et soit  $U(P)$  le potentiel correspondant. Celui-ci est toujours  $\leq 1$  (cf. n° 26) et le signe d'égalité a lieu en tout point de  $D$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle, ou, comme nous le dirons, "presque partout". Je dis que l'on a pour tout  $m \geq U(M)$

$$\gamma = \frac{m - U(M)}{C(F)}.$$

Pour prouver ce fait, remarquons d'abord que si  $\nu'$  et  $U'(M)$  sont la distribution et le potentiel analogues pour le noyau  $D'$  on a

$$U'(M) \leq U(M)$$

en tout point de  $T$ . En effet, si la frontière  $F$  est suffisamment régulière, de manière que les valeurs limites de  $U(P)$  soient  $= 1$  sans exception sur celle-ci, cette inégalité est une conséquence immédiate du principe du maximum pour les fonctions harmoniques,  $U'(P)$  étant toujours  $\leq 1$ . Si cette condition n'est pas remplie, on peut démontrer l'inégalité par un passage à la limite tout à fait analogue à celui du n° 28.

Cela étant, nous aurons de la même façon que dans le n° 37

$$\begin{aligned} \gamma C(D') &= \int_{D'} h(P) d\nu'(P) = \int_{D'} d\mu_M(Q) \int_{D'} \frac{1}{r_{QP}} d\nu'(P) - \int_{D'} \frac{1}{r_{MP}} d\nu'(P) \\ &= -U'(M) \geq m - U(M). \end{aligned}$$

D'autre part, en intégrant  $h(P)$  par rapport à  $\nu$ , on aura,  $h(P)$  étant  $\geq \gamma$  "presque partout" dans  $D$  et  $C(D) = C(F)$ ,

$$(1) \quad \gamma C(F) = \gamma C(D) \leq \int_D h(P) \nu(P) = m - U(M).$$

Par conséquent, pour  $m \geq U(M)$  on a

$$\gamma \leq \frac{m - U(M)}{C(F)} = \frac{m - U(M)}{C(D)} \leq \frac{m - U(M)}{C(D')} \leq \gamma.$$

La relation cherchée en résulte immédiatement et nous obtenons au surplus  $C(D') = C(D)$ .

Pour  $m < U(M)$  la relation ne devrait pas être vraie, mais l'inégalité (1) nous apprend que dans ce cas  $\gamma$  est certainement  $< 0$ . D'où il suit aussitôt que *la condition nécessaire et suffisante pour que la constante  $\gamma$  soit égale à zéro, est que la masse répartie sur  $D$  soit égale à  $U(M)$* . Par conséquent, en choisissant  $m = U(M)$  nous aurons

$$\begin{aligned} h(P) &= 0 && \text{presque partout dans } D', \\ h(P) &\geq 0 && \text{presque partout dans } D. \end{aligned}$$

Or  $h(P)$  est une fonction harmonique en tout point fini extérieur à  $D' + M$ , elle ne peut donc pas être maximée dans ce domaine. Au point  $M$  on a  $h(M) = -\infty$  au point à l'infini la fonction s'annule, et en un point frontière  $P_0$  de  $D'$  on a d'après le théorème 2 du numéro précédent,  $P'$  restant dans  $D'$  et  $M'$  dans  $\omega - D'$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{M' \rightarrow P_0} h(M') &= \limsup_{M' \rightarrow P_0} \int_{D'} \frac{1}{r_{M'Q}} d\mu_M(Q) - \frac{1}{r_{MP_0}} \\ &\leq \limsup_{P' \rightarrow P_0} \left\{ \int_{D'} \frac{1}{r_{P'Q}} d\mu_M(Q) - \frac{1}{r_{MP'}} \right\} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques nous apprend alors que  $h(P) \leq 0$  partout dans  $\omega$ . L'inégalité opposée étant vraie "presque partout" dans  $D$ , on a  $h(P) = 0$  "presque partout" dans  $D$ , c'est-à-dire que *le potentiel de la distribution  $\mu_M$  se confond "presque partout" dans  $D$  avec le potentiel initial  $1/r_{MP}$* . On peut encore préciser cet énoncé. En effet, on conclut immédiatement (cf. n° 32) que *le potentiel de la masse balayée  $\mu_M$  est égal à  $1/r_{MP}$  en tout point  $P$  de  $D$  où la densité capacitaire supérieure de  $D$  est  $> 0$* . Cela arrive en particulier en tout point intérieur de  $D$ , c'est-à-dire en tout point extérieur à  $T + F$ . D'où il

résulte tout de suite par la formule classique de GAUSS que *toute la masse balayée est répartie sur la frontière  $F$*  (cf. n<sup>os</sup> **18** et **30**).

Le cas où le domaine  $T$  est fini, peut se traiter d'une manière analogue; il est en réalité plus simple, car dans ce cas la masse balayée sur la frontière est toujours = 1. En effet, résolvons le problème du n<sup>o</sup> **37**,  $M$  étant un point de  $T$  et  $F$  la frontière de ce domaine. On voit ensuite en répétant les raisonnements précédents, que la différence  $h(P)$  est égale à une constante  $\gamma \geq 0$  "presque partout" dans  $F$ . Mais on a ici toujours  $\gamma = 0$  (cf. la dernière formule du n<sup>o</sup> **37**), car le potentiel de la distribution d'équilibre sur  $F$  admet son maximum en tout point intérieur à  $F$ , donc, en particulier en  $M$ .<sup>4</sup> De plus,  $h(P)$  est une fonction harmonique dans le domaine infini extérieur à  $F$ , même au point à l'infini car elle est la différence de deux potentiels newtoniens dus à deux distributions de la même masse. Or, en ce point la fonction atteint son maximum nul, elle est par conséquent égale à cette constante en tout point du domaine infini. Pour les points restants de l'ensemble complémentaire à  $T + F$ , le même fait se démontre par l'artifice de les ajouter à  $F$  (cf. plus haut). Le potentiel de la masse balayée sur  $F$  reste donc conservé encore extérieur à  $T + F$ .

Le balayage est toujours unique. En effet, la distribution d'équilibre étant unique (n<sup>os</sup> **17** et **31**), on voit d'abord que la masse balayée  $m$  ne peut être déterminée que d'une seule manière. D'autre part, supposons que  $\mu'_M$  soit une seconde distribution de la masse  $m$  résolvant le problème, on voit facilement que cette distribution rend aussi l'intégrale  $G(\mu)$  minimum, c'est-à-dire  $G(\mu'_M) = G(\mu_M)$ . D'où il vient, en écrivant  $\mu'_M = \mu_M + \sigma$ ,

$$\iint_F \frac{1}{r_{PQ}} d\sigma(P)d\sigma(Q) = 0$$

et les deux distributions  $\mu_M$  et  $\mu'_M$  sont identiques (n<sup>o</sup> **16**).<sup>5</sup>

Le balayage d'une masse répartie suivant une loi  $\mu$  sur un ensemble  $A$  de  $T$  à distance *positive* de  $F$  est maintenant immédiat. La masse balayée

<sup>4</sup>D'où il résulte que la masse balayée sur la frontière peut s'exprimer par la même formule  $m = U(M)$  que dans le cas où le domaine  $T$  est infini. Voir aussi A. J. MARIA, loc. cit., où l'on trouve une formule générale pour les masses balayées.

<sup>5</sup>L'unicité du balayage est démontrée par M. DE LA VALLÉE POUSSIN dans le cas où l'ensemble des points exceptionnels est dénombrable ou encore contenu dans un ensemble fermé de capacité nulle; voir le Mémoire cité, p. 206.

sur  $F$  est égale à l'intégrale

$$\int_A U(M) d\mu(M);$$

elle est toujours inférieure ou égale à la masse initiale. Le potentiel reste conservé en tout point extérieur à  $T + F$ , et encore dans  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle, où il peut être diminué. En épuisant le domaine  $T$  de plus en plus par des ensembles  $A$  à distance positive de  $F$  et en faisant le balayage de proche en proche, on voit facilement que le théorème est vrai encore dans le cas où les masses s'étendent jusqu'à la frontière  $F$ .

REMARQUE. Dans la démonstration du premier théorème du n° 38 nous avons balayé toute la masse sur  $F$ , mais il suffirait évidemment dans le cas actuel de balayer la masse  $m = U(M)$ . Nous obtiendrons ainsi une inégalité plus précise:

*Si le potentiel  $u$  d'une distribution positive  $\mu$  est  $\leq K$  en tout point du noyau de masse relatif à  $\mu$ , on a en tout point  $M$  de l'ensemble complémentaire  $u(M) \leq KU(M)$ .*

**40. Fonction de Green.** — Si la frontière  $F$  de  $T$  est suffisamment régulière, la fonction

$$-h(P) = \frac{1}{r_{MP}} - \int_F \frac{1}{r_{PQ}} d\mu_M(Q)$$

est reconnue identique à la fonction classique de GREEN. Nous la désignerons par  $G(P, M)$ . Cette fonction est ici définie comme la somme algébrique des potentiels engendrés par la masse unité placée au point  $M$  et la répartition négative  $-\mu_M$  sur la frontière  $F$  obtenue par le balayage. Elle est par conséquent définie comme fonction dans tout l'espace, nous observons tout de suite que cette fonction est sousharmonique<sup>6</sup> hors de  $M$  et, en particulier, harmonique en tout point extérieur à  $M$  et à  $F$ . La répartition négative  $-\mu_M$  sur  $F$  est choisie de manière que  $G(P, M) = 0$  dans le domaine complémentaire à  $T$ , s'il en existe, et aussi en tout point de  $F$  à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. Dans le domaine  $T$

<sup>6</sup>Cela implique que  $G(P, M)$  est semicontinue supérieurement.

la fonction est toujours positive. La signification physique de la répartition  $-\mu_M$  est manifeste: c'est la couche négative induite sur  $F$  par la masse unité au point  $M$ , en supposant le "conducteur"  $F$  en communication avec le sol.<sup>7</sup>

La fonction de GREEN est ainsi définie directement pour un domaine quelconque  $T$  dont la frontière est un ensemble fermé de capacité  $> 0$ . On pourrait aussi parvenir à cette fonction en épuisant le domaine  $T$  de plus en plus par des domaines  $T_n$  dont les frontières sont suffisamment régulières pour que les fonctions de GREEN correspondantes  $G^{(n)}(P, M)$  se confondent avec les solutions classiques. Il est facile de prouver que la fonction qu'on obtient en passant à la limite, appelée parfois la fonction de GREEN généralisée (cf. le chapitre suivant), est identique à la fonction  $G(P, M)$  obtenue directement par le problème de variation. Quant à la démonstration, nous nous contentons de faire observer que les répartitions  $\mu_M^{(n)}$  sur les frontières des domaines approchants  $T_n$  tendent vers une répartition limite  $\mu'_M$  sur  $F$ , telle que  $G(\mu'_M) = G(\mu_M)$ , comme on le voit par un raisonnement analogue à celui employé dans le n° 28. D'où il vient immédiatement  $\mu'_M = \mu_M$ .

Nous démontrons enfin la relation classique

$$G(P, M) = G(M, P).$$

Supposons d'abord que les points  $P$  et  $M$  appartiennent tous les deux au domaine  $T$ . Il s'agit évidemment de prouver que

$$\int_F \frac{1}{r_{PQ}} d\mu_M(Q) = \int_F \frac{1}{r_{MS}} d\mu_P(S).$$

On aura, en négligeant toujours un ensemble de capacité nulle:

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{r_{PQ}} d\mu_M(Q) &= \int_F d\mu_M(Q) \int_F \frac{1}{r_{QS}} d\mu_P(S) = \int_F d\mu_P(S) \int_F \frac{1}{r_{SQ}} d\mu_M(S) \\ &= \int_F \frac{1}{r_{MS}} d\mu_P(S). \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Cette conception de la fonction de Green se trouve p. ex. chez O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, p. 237.

La relation est donc vraie dans ce cas. Elle l'est encore si  $P$  et  $M$  appartiennent à des domaines différents, car on a alors

$$G(P, M) = G(M, P) = 0.$$

## VI. Problème de Dirichlet.

**41. Problème classique et problème généralisé.**<sup>1</sup> — Soit  $T$  un domaine connexe borné, limité par un nombre fini de surfaces régulières<sup>2</sup>  $S$ , le problème classique de DIRICHLET (problème intérieur) consiste à trouver une fonction  $H(P)$  assujettie aux conditions suivantes:

- 1° elle est harmonique en tout point de  $T$ ;
- 2° elle est continue dans  $T + S$ ;
- 3° elle se réduit sur  $S$  à une fonction  $f(Q)$  donnée à l'avance.

Si  $T$  est un domaine s'étendant à l'infini, constitué par exemple par l'extérieur d'un nombre fini de surfaces régulières  $S$ , extérieures les unes aux autres, on pourrait poser le problème diversement; en général, si le nombre de dimensions de l'espace considéré est  $\geq 3$ , on exige, outre les points 1°–3° ci-dessus, que la fonction s'annule à l'infini (*problème extérieur*). En particulier, si la fonction donnée sur  $S$  est constante, ce dernier problème se ramène au problème d'équilibre d'une masse attirante sur  $S$  que nous avons étudié plus haut.

Ces problèmes sont toujours résolubles dans les conditions imposées à  $S$ , et la solution est unique. En réalité on n'a pas besoin d'exiger la régularité des surfaces  $S$ ; il suffit, pour fixer les idées, qu'elles satisfassent à la condition de POINCARÉ relativement à l'extérieur ou à l'intérieur suivant le cas (n° 13). D'autre part, une condition d'une nature ou d'une autre est indispensable, comme le montre l'exemple classique de M. LEBESGUE d'un domaine simplement connexe pour lequel le problème de DIRICHLET n'est pas toujours résoluble.<sup>3</sup>

Nous aurons à nous occuper du cas le plus général où la frontière du domaine  $T$  est un ensemble fermé et borné  $F$  quelconque. Il est clair que

---

<sup>1</sup>Pour la bibliographie concernant les questions dont il s'agit ici nous renvoyons en particulier au travail cité (p. 43, note 2) de M. BRELOT.

<sup>2</sup>Nous disons qu'une surface est régulière si elle possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.

<sup>3</sup>H. LEBESGUE, Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet, *C. R. des Séances de la Soc. math. de France*, 1913.

dans ce cas le problème de DIRICHLET dans sa forme classique est en général impossible, et il faut le remplacer par un autre. Ce problème généralisé de DIRICHLET se divise d'après MM. LEBESGUE<sup>4</sup> et WIENER<sup>5</sup> en deux parties: 1° la construction d'une fonction harmonique dans  $T$ , déterminée d'une manière univoque pour chaque fonction continue  $f(Q)$  sur la frontière; 2° l'étude de cette fonction-là dans le voisinage de la frontière.

Le premier point est résolu par M. WIENER,<sup>6</sup> comme nous l'avons déjà indiqué dans le n° 22. En effet, on peut "prolonger" la fonction continue  $f(Q)$  sur  $F$  par une fonction continue  $g(P)$  dans tout l'espace, et cela même d'une infinité de manières.<sup>7</sup> Ensuite, on peut épuiser le domaine  $T$  par une suite illimitée de domaines  $T_n$ , tels que pour chacun de ceux-ci le problème classique de DIRICHLET peut être résolu si l'on donne une fonction continue sur la frontière. Déterminons alors cette fonction chaque fois par les valeurs du prolongement  $g(P)$ , nous obtenons une suite illimitée de fonctions harmoniques, qui — et c'est le point essentiel — convergent vers une fonction harmonique dans  $T$ , indépendante du prolongement choisi de  $f(Q)$  et indépendante de l'épuisement par les domaines  $T_n$ . Nous désignerons cette fonction par  $H(P)$ . Ajoutons qu'une méthode analogue a été employé antérieurement par M. BOULIGAND<sup>8</sup> pour définir une fonction de GREEN généralisée (cf. n° 40) relative à un domaine général  $T$ , avec le pôle en un point intérieur.

**42. Points réguliers, points irréguliers.** — Etudions maintenant les valeurs limites que prend la fonction  $H(P)$  sur la frontière  $F$ . Nous obtenons d'abord le résultat important que si  $T$  est un domaine pour lequel le problème classique de DIRICHLET est possible, la fonction  $H(P)$  prend les valeurs  $f(Q)$  sur  $F$ ; *elle est par conséquent identique à la solution clas-*

<sup>4</sup>H. LEBESGUE, Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet, *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **178** (1924), p. 349.

<sup>5</sup>N. WIENER, Mémoire cité plus haut (p. 43, note 1) dans le *Journ. of Math. Massachusetts Inst. of Technology*, Jan. 1924.

<sup>6</sup>N. WIENER, loc. cit.

<sup>7</sup>Voir p. ex.: C. CARATHÉDORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, zweite Auflage (1927), p. 620.

<sup>8</sup>G. BOULIGAND, Sur les fonctions bornées et harmoniques dans un domaine infini, nulles sur sa frontière, *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **169** (1919), p. 763.

*sique.* Dans le cas général nous dirons que  $Q$  est un point frontière *régulier*<sup>9</sup> si pour toute distribution de valeurs continues  $f(Q)$  sur  $F$ , on a

$$\lim_{P \rightarrow Q} H(P) = f(Q),$$

$P$  tendant vers  $Q$  d'une manière quelconque en restant dans  $T$ . Dans le cas contraire  $Q$  est appelé un point frontière irrégulier; il existe alors au moins une fonction continue  $f_1(Q)$  et une suite de points  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ , tendant vers  $Q$  de façon que

$$\lim_{P \rightarrow Q} H_1(P) \neq f_1(Q),$$

où  $H_1(P)$  est, comme plus haut, la fonction harmonique correspondant à  $f_1(Q)$ .

On doit à M. BOULIGAND<sup>10</sup> le théorème important disant qu'un point  $Q$  est régulier si la fonction de GREEN généralisée tend vers zéro en ce point, et naturellement dans ce cas seulement. On peut supposer le pôle placé en un point arbitraire  $M$  de  $T$ . Avec la définition de la fonction de GREEN donnée dans le n° 40 nous pouvons encore énoncer ce théorème de la manière suivante: Pour qu'un point frontière soit régulier, il faut et il suffit que la fonction de GREEN s'annule en ce point. En effet, dans le numéro cité nous avons vu que  $G(P, M)$  s'annule "presque partout" sur  $F$  et partout dans l'ensemble complémentaire à  $T + F$ ; alors, si l'on a

$$\lim_{P \rightarrow Q} G(P, M) = 0,$$

$P$  tendant vers  $Q$  en restant dans  $T$ , la valeur moyenne de  $G(P, M)$  sur une sphère de centre  $Q$  tend aussi vers zéro avec le rayon de cette sphère. Or la fonction est sousharmonique hors de  $M$ , elle s'annule donc au point  $Q$  lui-même. Inversement, si  $G(C, M) = 0$ , toute valeur limite est aussi égale à zéro en vertu de la semicontinuité supérieure.

Le théorème suivant est maintenant une conséquence immédiate:

**THÉORÈME.** *Les points irréguliers forment un ensemble dont la capacité newtonienne est nulle.*

<sup>9</sup>H. LEBESGUE, loc. cit., *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **178** (1924). — N. WIENER, The Dirichlet problem, *Journ. of Math. Massachusetts Inst. of Technology*, April 1924.

<sup>10</sup>G. BOULIGAND, Sur le problème de Dirichlet, *Ann. de la Soc. Polonaise de Math.*, 1925. — Cf. O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, p. 331.

Nous avons implicitement supposé que la frontière est un ensemble de capacité positive. Si la capacité de  $F$  est  $= 0$ , le théorème devient une banalité. D'ailleurs, on sait que dans ce cas il ne peut exister une fonction non constante qui soit harmonique et bornée dans  $T$ ,<sup>11</sup> et le problème de DIRICHLET n'a aucun sens pour une fonction  $f(Q)$  bornée.

**43. Lemme de Kellogg.** — Le théorème démontré contient comme cas particulier un lemme énoncé par KELLOGG<sup>12</sup> en 1926: *Tout ensemble fermé de capacité  $> 0$  contient au moins un point régulier.* Ce lemme, qui joue un rôle fondamental dans toutes les questions concernant l'unicité de fonctions harmoniques,<sup>13</sup> fut prouvé dans le cas du plan par KELLOGG lui-même en 1928,<sup>14</sup> mais les difficultés de la démonstration générale faisaient d'abord échouer tous les efforts.<sup>15</sup> Finalement, après la publication des recherches si fécondes de M. DE LA VALLÉE POUSSIN sur la méthode du balayage, M. EVANS<sup>16</sup> réussissait à prouver le lemme dans le cas général. Plus récemment, M. VASILESCO<sup>17</sup> a donné une autre démonstration de la même proposition.

Inversement, si le lemme de KELLOGG est démontré, on peut en conclure que l'ensemble des points irréguliers est de capacité nulle. Ce fait fut observé par M. VASILESCO<sup>18</sup> déjà en 1930, toutefois, son énoncé diffère légèrement du nôtre; en employant une notation due à M. BOULIGAND, M. VASILESCO caractérise les points irréguliers comme un ensemble impropre. Notre théorème peut en réalité paraître incompatible avec un résultat obtenu par ce géomètre, selon qui il peut exister un ensemble de capacité

<sup>11</sup>G. BOULIGAND, loc. cit.

<sup>12</sup>O. D. KELLOGG, loc. cit., *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. U. S. A.* **12** (1926).

<sup>13</sup>Voir: O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, p. 336.

<sup>14</sup>O. D. KELLOGG, Unicité des fonctions harmoniques, *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **187** (1928), p. 526.

<sup>15</sup>Ce sont en particulier KELLOGG et M. VASILESCO qui s'en sont occupés. Cf. M. BRELOT, loc. cit.

<sup>16</sup>G. G. EVANS, Application of Poincaré's sweeping-out process, *Proc. of the Nat. Ac. of Sc. U. S. A.* **19** (1933), p. 457.

<sup>17</sup>F. VASILESCO, Sur la continuité du potentiel à travers des masses et la démonstration d'un lemme de Kellogg, *C. R. de l'Ac. des Sc. Paris* **200** (1935), p. 1173.

<sup>18</sup>F. VASILESCO, Sur les singularités des fonctions harmoniques, *Journ. de Math.* **9** (1930), p. 110.

positive de points irréguliers; on peut même construire un tel ensemble.<sup>19</sup> Mais cela tient à ce que M. VASILESCO entend toujours par la capacité d'un ensemble la capacité de la fermeture. Dans l'exemple donné les points irréguliers forment un ensemble partout dense sur la frontière.

---

<sup>19</sup>loc. cit., p. 103.

## VII. Ensembles de capacité nulle.

**44. Infinis d'un potentiel.** — Sauf dans les cas les plus simples la détermination exacte de la capacité d'un ensemble est impossible, même si le problème d'équilibre est résoluble théoriquement. Mais, comme nous l'avons déjà vu et comme nous le verrons encore dans les applications à la théorie des fonctions, la question la plus intéressante est celle de décider si un ensemble est de capacité nulle ou non, et cela est possible dans bien des cas. Cependant, il semble qu'il en soit ici comme pour le problème de la convergence des séries: une condition à la fois nécessaire et suffisante et en même temps plus simple que la définition elle-même n'existe pas. Démontrons d'abord le théorème suivant.

**THÉOÈME.** *Le potentiel par rapport à  $\Phi(r)$ ,<sup>1</sup> dû à une distribution quelconque de masse positive finie, est fini partout sauf au plus dans un ensemble de points dont la capacité  $C^{(\Phi)}$  est nulle.*

Soit  $\mu$  la distribution en question et  $u(P)$  son potentiel. Considérons un ensemble borné quelconque  $E$  de capacité  $> 0$ . Répartissons la masse unité sur celui-ci de manière que le potentiel dû à cette distribution  $\mu_1$  soit borné ( $< K$ ). On aura par conséquent en intégrant  $u(P)$  par rapport à  $\mu_1$ , et en intervertissant l'ordre des intégrations:

$$\begin{aligned} \int_E u(P) d\mu_1(P) &= \int_E d\mu_1(P) \int_\omega \Phi(r_{PQ}) d\mu(Q) \\ &= \int_\omega d\mu(Q) \int_E \Phi(r_{PQ}) d\mu_1(P) < K \int_\omega d\mu(Q) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc,  $u(P)$  ne peut être infini en tout point de  $E$ , et comme  $E$  est un ensemble arbitraire de capacité  $> 0$ , il s'ensuit que  $u(P)$  est infini au plus dans un ensemble de capacité nulle.

**COROLLAIRE 1.** *La capacité  $C^{(\Phi)}$  d'un ensemble  $E$  est nulle si l'on*

---

<sup>1</sup>Nous nous bornons en substance, dans ce chapitre comme précédemment, aux fonctions  $\Phi(r)$  telles que les deux définitions, de la capacité dans le n° 26 se confondent, ce qui nous permet de raisonner sur le potentiel directement. En particulier, nous considérons les capacités d'ordre  $\alpha > 0$  et la capacité logarithmique dans le plan, pour lesquelles cette condition est remplie. Cependant, avec des modifications légères des démonstrations, on pourrait facilement prouver que tous les théorèmes restent valides pour une fonction  $\Phi(r)$  plus générale, en admettant la première définition du n° 26.

peut répartir une masse positive finie sur  $E$ , de manière que son potentiel par rapport à  $\Phi(r)$  soit  $= +\infty$  en tout point de  $E$ .<sup>2</sup>

COROLLAIRE 2. Toute fonction sous harmonique (sur harmonique) dans un domaine  $D$  du plan est finie partout dans  $D$  sauf au plus dans un ensemble de points dont la capacité logarithmique est nulle. Le théorème est analogue pour un espace quelconque.

C'est une conséquence immédiate du théorème de M. F. RIESZ<sup>3</sup>, d'après lequel toute fonction sousharmonique dans  $D$  peut s'écrire, en tout domaine  $D'$  intérieur avec sa frontière à  $D$ , comme la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel logarithmique, engendré par une masse négative finie, répartie sur  $D'$ .

**45. Distributions sur un ensemble de capacité nulle.** — Nous étudierons maintenant le problème inverse: Étant donné un ensemble  $E$  de capacité nulle, que peut-on dire du potentiel engendré par une distribution de masse positive sur  $E$ ? Nous savons que la borne supérieure est infinie, mais, comme le potentiel n'est en général qu'une fonction semicontinue inférieurement, il n'en résulte pas qu'il admet effectivement la valeur  $+\infty$ . Cependant, nous allons prouver ci-dessous que c'est en réalité le cas. Établissons d'abord un lemme.

LEMME. Soit  $f(P)$  une fonction semicontinue intérieurement, qui est finie en tout point d'un ensemble fermé  $F$ . Il existe alors un point  $Q$  de  $F$  et un entourage  $0$  de  $Q$  (un cercle, une sphère etc. avec  $Q$  comme centre), tels que  $f(P)$  soit bornée supérieurement sur  $0F$ .

Cette proposition est une traduction simple d'un théorème de M. OSGOOD<sup>4</sup> sur la fonction limite d'une suite convergente de fonctions analytiques, d'ailleurs énoncé et démontré d'une manière plus générale par M. MONTEL.<sup>5</sup> La démonstration ci-dessous est presque identique à celle

---

<sup>2</sup>G. BOULIGAND, Ensembles impropres et nombre dimensionnel, *Bull. des Sc. math.* **52** (1928), p. 336.

<sup>3</sup>F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.* **48** (1926) et **54** (1930).

<sup>4</sup>W. F. OSGOOD, Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable; with corresponding theorems for definite integrals, *Ann. of Math.* (2 série) **3** (1901).

<sup>5</sup>P. MONTEL, *Séries de polynomes* (Coll. Borel), Paris 1910, p. 108.

de M. MONTEL.

Si  $f(P) \geq 1$  en tout point de  $F$ , le théorème sera démontré. Dans le cas contraire, il existe un point  $Q_1$  de  $F$  tel que  $f(Q_1) > 1$ , et comme la fonction est semicontinue inférieurement par hypothèse, l'inégalité précédente subsistera en tout point d'un entourage  $O_1$  de  $Q_1$ . Ensuite, il faut ou que  $f(P)$  soit  $\geq 2$  en tout point de  $O_1F$  ou qu'il existe un point  $Q_2$  de  $O_1F$  et un entourage  $O_2$ , de  $Q_2$ , intérieur avec sa frontière à  $O_1$ , tels que  $f(P)$  soit  $> 2$  en tout point de  $O_2$ . Si l'on pouvait continuer de cette façon la construction des entourages  $O_1 \supset O_2 \supset \dots$  indéfiniment, il existerait au moins un point de  $F$  intérieur à tous les  $O_n$ , et en ce point  $f(P)$  serait  $>$  tout nombre assigné, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que  $f(P)$  est finie en tout point de  $F$ . On finit ainsi nécessairement par trouver un point  $Q$  de  $F$  et un entourage  $O$  de  $Q$  avec les propriétés demandées.

Si l'ensemble  $F$  contient des points isolés, le lemme démontré est une banalité, ce qui cependant n'est pas le cas si  $F$  est parfait.

**THÉORÈME.** *Quelle que soit la répartition d'une masse positive sur un ensemble de capacité nulle, le potentiel est égal à  $+\infty$  en un point au moins.*

En effet, soit  $E$  cet ensemble et soit  $\mu$  une distribution de masse sur celui-ci. Désignons encore par  $F$  le noyau de masse relatif à cette distribution. Cela étant, si le potentiel était fini en tout point de  $F$ , on pourrait trouver un point  $Q$  de  $F$  et un entourage  $O$  (fermé) de  $Q$ , de manière que le potentiel fût borné sur  $OF$ . Par conséquent le nouveau potentiel obtenu en écartant la masse hors de  $O$ . c'est-à-dire hors de  $OF$ , serait aussi borné sur  $OF$ , donc, en tout point de  $\omega$  (principe du maximum). Mais, la masse restante étant  $> 0$ , on aurait alors une répartition de masse positive sur  $E$  dont le potentiel serait borné, ce qui n'est pas possible, puisque  $E$  est de capacité nulle. Il existe donc nécessairement au moins un point de  $F$  où le potentiel est égal à  $+\infty$ . C. Q. F. D.

La démonstration prouve de plus que les points de potentiel infini sont partout denses sur  $F$ .

Il suit du théorème qu'on vient de démontrer qu'un ensemble est certainement de capacité  $> 0$  s'il existe sur cet ensemble une répartition de masse dont le potentiel est fini partout, sans être nécessairement borné.

**46.** Considérons une distribution de masse positive finie dans l'espace  $\omega$ . Soit  $P$  un point quelconque et désignons par  $\mu(P, r)$  la masse contenue dans un cercle (une sphère etc.) de centre  $P$  et de rayon  $r$ . Pour chaque point  $P$  la masse  $\mu(P, r)$  est une fonction de  $r$ , bornée et non décroissante, qui pour  $r \rightarrow 0$  tend vers une valeur limite bien déterminée. Si le potentiel d'un certain ordre est fini au point  $P$ ,  $\mu(P, r)$  tend vers zéro au moins d'un certain ordre. Inversement, si  $\mu(P, r)$  tend vers zéro d'un certain ordre, le potentiel d'un certain ordre au moins est fini au point  $P$ . Plus précisément, on a:<sup>6</sup>

Le potentiel d'ordre  $\alpha$  ou encore, pour  $\alpha = 0$ , le potentiel logarithmique, est fini au point  $P$  si l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{\mu(P, r)}{r^{1+\alpha}} dr$$

converge,  $\varepsilon$  étant un nombre positif arbitraire.

En effet, si cette intégrale est finie, nous aurons en intégrant par parties:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\mu(P, r)}{r^{1+\alpha}} dr = -\frac{\mu(P, \varepsilon)}{\alpha \varepsilon^\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^\varepsilon \frac{d\mu(P, r)}{r^\alpha} dr.$$

La dernière intégrale exprime le potentiel en  $P$  dû à la masse  $\mu(P, \varepsilon)$ , et si celui-ci est fini, il en sera de même du potentiel de la masse totale, la masse restante étant à distance positive de  $P$ .

En variant le point  $P$  on aura un ensemble de fonctions  $\mu(P, r)$ ; si pour chacune de celles-ci l'inégalité ci-dessus a lieu (non nécessairement d'une manière uniforme), le potentiel est fini partout. L'ensemble, sur lequel la masse est répartie, est alors d'après le théorème précédent de capacité non nulle.

Ces conditions sont en particulier remplies si toutes les fonctions  $\mu(P, r)$  sont majorées par une fonction  $h(r)$ , telle que l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon \frac{h(r)}{r^{1+\alpha}} dr$$

converge.

---

<sup>6</sup>Cf. G. BOULIGAND, loc. cit., p. 339.

**47. Mesure de Hausdorff.** — De cette remarque nous allons déduire une condition suffisante pour qu'un ensemble fermé soit de capacité non nulle, condition qui se rattache étroitement aux propriétés purement géométriques de l'ensemble.

A cet effet, supposons p. ex. que  $\omega$  soit le plan à deux dimensions et considérons, pour fixer les idées, la famille de tous les carrés dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées. Un ensemble borné quelconque  $E$  peut être enfermé dans un nombre fini ou une infinité dénombrable de carrés de cette famille  $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$  avec des côtés  $\delta_i \leq \rho$ . Soit encore  $h(t)$  une fonction de  $t$ , continue et non décroissante, avec  $h(0) = 0$ , et formons la somme

$$\sum_i h(\delta_i).$$

Si l'on fait varier les  $C_i$  de toutes les manières possibles, cette somme a une borne inférieure  $H_\rho \geq 0$ . Faisons ensuite tendre  $\rho$  vers zéro,  $H_\rho$  ne peut décroître et la limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho = H$$

existe toujours, finie ou infinie. La construction ci-dessus est due à M. HAUSDORFF,<sup>7</sup> qui a prouvé que la quantité  $H$ , définie de cette façon pour tout ensemble  $E$ , est une mesure extérieure régulière dans le sens de M. CARATHÉODORY.<sup>8</sup> Nous l'appellerons la mesure  $H$  de l'ensemble  $E$ ; elle est évidemment variable avec la fonction déterminante  $h(t)$ .

Ainsi, pour  $h(t) = t$  nous aurons la mesure linéaire, pour  $h(t) = t^2$  la mesure superficielle, en général, pour  $h(t) = t^\alpha$ , où  $\alpha$  est un nombre positif arbitraire, la mesure dite  $\alpha$ -dimensionnelle. Pour

$$h(t) = \frac{1}{\left| \log \frac{1}{t} \right|}$$

la mesure  $H$  correspondante s'appelle la mesure logarithmique, et nous pouvons manifestement par des compositions et des itérations des fonctions  $h(t)$ , p. ex.

$$h(t) = t^\alpha \left( \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \right)^\beta \left( \frac{1}{\log \log \frac{1}{t}} \right)^\gamma \cdots \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots \geq 0),$$

<sup>7</sup>F. HAUSDORFF, Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* **79** (1919).

<sup>8</sup>Voir: C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, zweite Auflage (1927), p. 258.

construire une classe de mesures, bien plus étendue que celle fournie par les fonctions  $t^\alpha$ .

Nous démontrons maintenant le théorème suivant, qui fait reconnaître une liaison entre la mesure  $H$  et la capacité.

THÉORÈME 1. *La capacité d'ordre  $\alpha$  ou encore pour  $\alpha = 0$ , la capacité logarithmique, d'un ensemble fermé est  $> 0$  si la mesure  $H$  de l'ensemble est  $> 0$  par rapport à une fonction  $h(t)$ , telle que l'intégrale*

$$\int_0^\varepsilon \frac{h(t)}{t^{1+\alpha}} dt$$

*converge.*<sup>9</sup>

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Il est clair que la fonction  $h(t)$  est  $> 0$  pour tout  $t > 0$ , sinon la mesure  $H$  s'annulerait pour tout ensemble. Cela étant, enfermons l'ensemble fermé  $F$  dans une suite de carrés, comme nous venons de le faire ci-dessus, mais sans la condition restrictive  $\delta_i \leq \varrho$ , et formons la somme des  $h(\delta_i)$ . La borne inférieure de ces sommes, quand les carrés varient, est un nombre non négatif  $H'$ , qui est évidemment  $< H$ . Considérons une suite illimitée de recouvrements  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , tels que les sommes correspondantes des  $h(\delta_i)$  tendent vers  $H'$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Si, pour  $n$  tendant vers l'infini, le côté maximum dans tout recouvrement  $S_n$  a la limite inférieure zéro, on a  $H' = H > 0$ . Dans le cas contraire, il existe dans chaque  $S_n$  un carré dont le côté est  $\geq \eta > 0$ , et la somme des  $h(\delta_i)$  est toujours  $\geq h(\eta) > 0$ . On a donc dans toute hypothèse  $H' > 0$ .

Admettons maintenant que l'ensemble  $F$  soit contenu dans un carré fondamental  $C_0$  avec le côté  $un$  et construisons un réseau dans  $C_0$  par des subdivisions successives, p. ex. chaque fois en quatre carrés égaux. Supposons que l'on soit ainsi arrivé au  $n^{\text{ième}}$  grillage et appelons ses mailles  $M_n$  leur côté est  $\delta_n = 1/2^n$ . Pour éviter des ambiguïtés nous conviendrons qu'une maille ne contient que deux de ses côtés (contigus) et un seul de ses sommets. Alors, sur chaque maille  $M_n$  contenant des points de l'ensemble

---

<sup>9</sup>Cf. G. BOULIGAND, loc. cit., p. 364, où un théorème analogue est énoncé, et P. J. MYRBERG, Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche, *Acta Math.* **61** (1933), p. 63, où le théorème est démontré pour le logarithme par une étude de la représentation conforme du domaine multiplement connexe extérieur à l'ensemble donné.

$F$ , nous répartissons la masse  $h(\delta_i)$  de manière que la densité soit constante. Les autres mailles  $M_n$  ne seront pas chargées de masse. Mais il se pourrait qu'il faille maintenant réduire la masse, déjà distribuée sur les  $M_n$ . Voici comment cette réduction s'opère de proche en proche. S'il existe des mailles  $M_{n-1}$  du grillage d'ordre  $(n-1)$  qui portent une masse  $> h(\delta_{n-1})$ , on commence par réduire la masse sur chacune de celles-ci, de manière qu'après la réduction elle soit précisément  $= h(\delta_{n-1})$ . On peut obtenir cela en divisant la densité de la masse répartie par une constante positive convenable. Si, au contraire, une maille  $M_{n-1}$  porte une masse  $\leq h(\delta_{n-1})$ , on ne fait ici aucune réduction. Nous dirons pour abrégé que par ce procédé les mailles  $M_{n-1}$  sont réduites. Ensuite, nous continuons de cette façon à réduire les mailles  $M_{n-2}$  et ainsi de suite jusqu'à  $C_0$ . La masse portée par une maille  $M_i$  sera par conséquent  $\leq h(\delta_i)$  et la masse totale  $m_n \leq h(1)$ .

Mais on a ici encore une inégalité dans le sens opposé. En effet, chaque point de  $F$  est intérieur à une maille au moins  $M_i$ , appartenant à l'une des familles

$$M_0 = C_0, M_1, M_2, \dots, M_n,$$

telle que la masse répartie sur  $M_i$  soit  $= h(\delta_i)$ . Elle peut être une maille  $M_n$ , à savoir s'il n'a pas été nécessaire de réduire les masses; elle peut aussi être  $C_0$ , à savoir dans le cas où une réduction a été nécessaire pour chaque indice  $< n$ . S'il y a plusieurs mailles de cette espèce, nous conviendrons de choisir celle qui a l'indice le plus petit. On peut alors couvrir tout l'ensemble  $F$  par une suite de carrés, choisis par la règle mentionnée, de manière que chaque point de  $F$  soit recouvert une fois et une seule. Si nous formons la somme correspondante des  $h(\delta_i)$ , nous aurons par conséquent

$$\sum_i h(\delta_i) = m_n.$$

Mais comme la mesure  $H$  de  $F$  est  $> 0$  par hypothèse, donc  $H' > 0$ , cette somme a une borne inférieure  $b > 0$ . La masse  $m_n$  répartie sur les carrés satisfait donc à l'inégalité double

$$b \leq m_n \leq h(1).$$

Pour chaque nombre entier positif  $n$  construisons une distribution de masse de la manière qui vient d'être décrite ci-dessus, nous aurons une suite illimitée de fonctions de distribution d'une masse variable  $m_n$ , toujours

$\leq h(1)$  mais  $\geq b$ . Par le théorème du choix (n° 3) il existe au moins une fonction limite  $\mu$  de cette suite, et l'on voit aussitôt que  $\mu$  est une répartition d'une masse positive  $\leq h(1)$  mais  $\geq b$  sur l'ensemble  $F$ . Considérons alors un cercle de rayon  $r$ , centré en un point  $P$  quelconque, il existe un cercle concentrique de rayon  $r' > r$  et deux nombres entiers consécutifs  $(p-1)$  et  $p$ , tels que

$$\delta_p = \frac{1}{2^p} \leq r < r' < \frac{1}{2^{p-1}} = \delta_{p-1}.$$

On voit facilement que ces deux cercles sont toujours intérieurs au sens strict à 9 mailles au plus du grillage d'ordre  $(p1)$ , c'est-à-dire à 36 mailles au plus du grillage d'ordre  $p$ , donc, on aura pour chaque distribution  $\mu_n$  avec  $n \geq p$

$$\mu_n(P, r') \leq 36h(\delta_p) \leq 36h(r).$$

D'où il vient

$$\mu(P, r') \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(P, r') \leq 36h(r).$$

On en conclut immédiatement que le potentiel d'ordre  $\alpha$  est fini en tout point  $F$ , donc, la capacité d'ordre  $\alpha$  de l'ensemble  $F$  est  $> 0$ .

Ce théorème a une réciproque que voici:

**THÉORÈME 2.** *Si la capacité d'ordre  $\alpha$  d'un ensemble  $E$  (fermé ou non) est  $> 0$ , la mesure  $\alpha$ -dimensionnelle de l'ensemble est  $> 0$ ,  $\alpha = 0$  désignant toujours le cas logarithmique.*

Supposons  $\alpha > 0$ , le cas logarithmique<sup>10</sup> se traitant d'une manière analogue. Soit  $\mu$  une distribution de la masse unité sur  $E$ , dont le potentiel  $u(P)$  est partout  $< K$ , on a évidemment pour tout point  $P$  et pour tout  $r$  (cf. n° 32)

$$\frac{\mu(P, r)}{r^\alpha} \leq u(P) < K,$$

c'est-à-dire

$$\mu(P, r) \leq Kr^\alpha.$$

Considérons maintenant un recouvrement quelconque de l'ensemble  $E$  par des carrés  $C_i$ , de côtés  $\delta_i$ . Nous aurons, en appelant  $P_i$  le centre de  $C_i$ ,

$$\mu(C_i) \leq \mu(P_i, \delta_i) < k\delta_i^\alpha.$$

<sup>10</sup>Pour ce cas cf. P. J. MYRBERG, loc. cit., p. 63.

Donc,

$$\sum_i \delta_i^\alpha > \frac{1}{K} \sum \mu(C_i) \geq \frac{1}{K} > 0.$$

**48. Dimension capacitaire.** — Les deux derniers théorèmes nous permettent de faire des rapprochements entre la notion de capacité et la notion de *dimension* au sens de M. HAUSDORFF<sup>11</sup> du moins, si nous nous contentons de définir la dimension comme un nombre réel. Soit  $F$  un ensemble fermé, nous pouvons définir la *dimension hausdorffienne* de  $F$ ,

$$\dim_H(F),$$

comme la borne inférieure des nombres positifs  $\alpha$ , tels que la mesure  $\alpha$ -dimensionnelle de  $F$  est  $= 0$ .

Soit  $\alpha_0$  ce nombre, le théorème 2 du numéro précédent nous apprend alors que la capacité d'ordre  $\alpha_0 + \varepsilon$  de  $F$  est  $= 0$  pour chaque nombre positif  $\varepsilon$  si petit qu'il soit. D'autre part, supposons  $\alpha_0 > 0$ , alors, la mesure  $H$  est  $> 0$  par rapport à  $h(t) = t^{\alpha_0 - \varepsilon}$ . D'où il vient par le théorème 1 du même numéro que la capacité d'ordre  $\alpha_0 - 2\varepsilon$  de  $F$  est  $> 0$ , et cela pour tout  $\varepsilon$  arbitrairement petit. Cela revient à dire que  $\alpha_0$  est aussi la borne inférieure des nombres positifs  $\alpha$ , tels que la capacité d'ordre  $\alpha$  de  $F$  est  $= 0$ .

De ce point de vue MM. PÓLYA et SZEGÖ en sont venus à la notion de dimension,<sup>12</sup> et nous pouvons dire que cette notion se trouve ainsi définie comme une dimension capacitaire, et nous l'écrivons

$$\dim_C(F).$$

*Le fait fondamental, prouvé ci-dessus, est alors que pour tout ensemble fermé  $F$*

$$\dim_H(F) = \dim_C(F).$$

---

<sup>11</sup> *Math. Ann.*, loc. cit., p. 166.

<sup>12</sup> *Journ. de Crelle*, loc. cit., p. 43.

MM. PÓLYA et SZEGÖ ont remarqué que cette égalité a lieu pour l'ensemble bien connu de CANTOR, pour lequel on trouve

$$\dim_H = \dim_C = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63 \dots^{13}$$

**49.** Soit  $E$  un ensemble borné dans le plan,  $E'$  sa projection normale sur une ligne droite  $L$ . Il est presque évident que la mesure  $H$  de  $E'$  par rapport à une certaine fonction  $h(t)$  est toujours  $\leq$  la mesure  $H$  de  $E$ , car, tout recouvrement de  $E$  par des carrés  $C$ , peut servir à définir un recouvrement de  $E'$  par des carrés égaux  $C'_i$ . D'où il vient que si la projection  $E'$  sur  $L$  a une mesure  $H > 0$ , il en sera de même de l'ensemble  $E$ .

Cette simple remarque fournit une démonstration facile du fait que la capacité d'un continu est  $> 0$  pour tout indice  $\alpha < 1$ .<sup>14</sup> En effet, supposons que  $P$  et  $Q$  soient, deux points distincts du continu, comme celui-ci est un ensemble qui par définition même n'est pas décomposable en deux ensembles fermés disjoints sa projection normale sur la ligne droite joignant  $P$  à  $Q$  contient toute la portion  $PQ$  dont la mesure 1-dimensionnelle est  $> 0$ . Alors, la mesure 1-dimensionnelle du continu est aussi  $> 0$ , et il vient par le théorème 1 du n° **47** que la capacité du continu est  $> 0$  pour tout indice  $\alpha < 1$ .

Les ensembles fermés de capacité nulle pour un indice  $\alpha < 1$  ont alors la propriété très importante d'être dépourvus de continus, ou comme on dit aussi, partout discontinus. Un ensemble de cette espèce ne peut décomposer le plan; l'ensemble complémentaire constitue un seul domaine connexe.<sup>15</sup>

---

<sup>13</sup> *Ibid.*, p. 46.

<sup>14</sup> Cf. P. J. MYRBERG, loc. cit., p. 66.

<sup>15</sup> E. PHRAGMÉN, *Acta Math.* **7** (1885/86).

## VIII. Applications à la théorie des fonctions.

Dans ce chapitre nous nous occuperons de diverses applications de la notion de capacité à la théorie des fonctions d'une variable complexe, en particulier, à la théorie moderne fondée par M. ROLF NEVANLINNA, concernant, la distribution des valeurs admises par une fonction méromorphe. Ces applications ont surtout pour but de montrer comment la capacité logarithmique s'introduit tout naturellement dans ces théories comme la mesure la plus exacte de certains ensembles jouant un rôle fondamental.<sup>1</sup>

### 1. Fonctions méromorphes.

**50. Premier théorème fondamental de Nevanlinna.** — Une fonction  $w = w(z)$ , méromorphe dans le cercle  $|z| < R \leq +\infty$ , donne une représentation conforme de ce domaine sur une certaine surface de Riemann  $W$  étalée sur le plan des  $w$ , ou plutôt, sur la sphère de Riemann. Au cercle  $|z| \leq r < R$  correspond alors une surface de Riemann sphérique  $W_r$  faisant partie de  $W$  et ne couvrant un point arbitraire  $w = a$  qu'un nombre fini de fois, soit  $n(r, a)$ . Ce nombre, évidemment égal au nombre de fois que  $w(z)$  admet la valeur  $a$  à l'intérieur du cercle  $|z| < r$ , peut se calculer par une formule analogue à celle de GAUSS, obtenue en appliquant la formule de GREEN au potentiel logarithmique sur la sphère (n° 35),  $\log(1/[w, a])$ , considéré comme fonction de  $z = re^{i\varphi}$ . En effet, pour ne pas compliquer, supposons que  $w(z) \neq a$  pour  $|z| = r$ , nous aurons après des réductions faciles

$$n(r, a) = -\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{[w(re^{i\varphi}), a]} d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{|z| \leq r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\sigma,$$

où  $d\sigma$  est l'élément d'aire du plan des  $z$ . Si l'on pose

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[w(re^{i\varphi}), a]} d\varphi;$$

---

<sup>1</sup>Les résultats contenus dans la première partie de ce chapitre ont été publiés auparavant par l'auteur du présent travail dans deux Notes intitulées "Über den Kapazitätsbegriff und einen Satz von R. Nevanlinna", *Fysiogr. Sällsk. Lund förh.* **4** (1934); et "Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion", *Comptes rendus du 8<sup>e</sup> congrès des math. scand. à Stockholm* (1934). Toutefois, nous simplifions ici beaucoup l'exposé.

$$s(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| \leq r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} d\sigma = \frac{\text{aire de la surface sphérique } W_r}{\text{aire de la sphère}},$$

cette relation peut s'écrire

$$\frac{n(r, a)}{r} + \frac{\partial}{\partial r} m(r, a) = \frac{s(r)}{r}.$$

En intégrant cette équation par rapport à  $r$  on obtient

$$(1) \quad N(r, a) + m(r, a) = \int_0^r \frac{s(t)}{t} dt,$$

où  $N(r, a)$  est une intégrale de  $n(r, a)/r$ , avec une constante d'intégration déterminée de manière que  $\lim_{r \rightarrow 0} (N(r, a) + m(r, a)) = 0$ . La quantité

$$(2) \quad T(r) = \int_0^r \frac{s(t)}{t} dt,$$

ne dépendant évidemment que de  $r$  et de la fonction donnée, se nomme *la fonction caractéristique* ou, plus brièvement, *la caractéristique* de la fonction méromorphe  $w(z)$ , et l'invariance de la somme  $N(r, a) + m(r, a)$  constitue *le premier théorème fondamental* dans la théorie de M. NEVANLINNA.<sup>2</sup>

**51.** On s'assure immédiatement que pour  $r$  fixé  $m(r, a)$  est une fonction continue du point  $a$ . Il en est alors de même de  $N(r, a)$ , puisque la

---

<sup>2</sup>On trouve un exposé détaillé de toute la théorie dans la Monographie de M. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (Coll. Borel)*, Paris 1929.

L'interprétation du premier théorème fondamental, donnée ci-dessus, est due à M. AHLFORS: Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen, *Comment. phys.-math. Soc. Sci. Fenn.* **8** (1935). On doit observer que les fonctions  $N$ ,  $m$  et  $T$ , définies ici, ne sont pas les mêmes que celles de M. NEVANLINNA; toutefois, elles ne diffèrent de celles-ci que par des quantités qui sont toujours bornées pour  $r > 0$ , et ce fait n'a pas d'importance dans les applications. L'introduction de la distance cordale et de l'expression  $s(r)$  dans ces questions-ci a été faite, indépendamment l'un de l'autre, par MM. SHIMIZU et AHLFORS; voir: T. SHIMIZU, On the theory of meromorphic functions, *Japanese Journ. of Math.* **6** (1929); et L. AHLFORS, Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Comptes rendus du 7<sup>e</sup> congrès des math. scand. à Oslo* (1929).

somme  $N(r, a) + m(r, a)$  est indépendante de  $a$ . Ces fonctions sont donc susceptibles d'une intégration de STIELTJES par rapport à une fonction additive  $\mu(a)$ , donnant une distribution de masse sur la sphère de RIEMANN. Supposons  $\mu > 0$  et la masse totale = 1. On aura alors ( $\omega$  désignant la sphère totale):

$$\begin{aligned} T(r) &= \int_{\omega} N(r, a) d\mu(a) + \int_{\omega} m(r, a) d\mu(a) \\ &= \int_{\omega} N(r, a) d\mu(a) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} d\mu(a) \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[w(re^{i\varphi}, a)]} d\varphi. \end{aligned}$$

En intervertissant l'ordre des intégrations dans la dernière intégrale on peut encore écrire cette formule sous la forme

$$(1) \quad T(r) = \int_{\omega} N(r, a) d\mu(a) + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} d\mu(a) \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi,$$

où  $u(w)$  désigne le potentiel logarithmique de la distribution  $\mu$ .

**52. Valeurs limites d'une fonction de caractéristique bornée.** — La dérivée de la fonction caractéristique  $T(r)$  par rapport à  $\log r$  étant égale à la fonction positive et croissante  $s(r)$ , comme le montre aussitôt l'expression (2) du n° 50,  $T(r)$  est une fonction croissante et convexe de  $\log r$ . Ainsi, si  $w(z)$  est méromorphe dans tout le plan ( $R = \infty$ ),  $T(r)$  tend vers l'infini avec  $r$ , sauf dans le cas banal où  $w(z)$  se réduit à une constante.

Si  $R$  est fini, il peut encore arriver que  $T(r)$  tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers  $R$ , et les fonctions  $w(z)$  appartenant à cette classe ont à plusieurs égards des propriétés analogues à celles des fonctions méromorphes dans tout le plan. D'autre part, il peut aussi arriver que  $T(r)$  tend vers une limite finie pour  $r$  tendant vers  $R$ . Indiquons d'abord quelques propriétés de ces dernières fonctions.

Toutes les fonctions holomorphes et bornées dans  $|z| < R$  appartiennent à cette classe, ainsi que tout quotient de deux fonctions de cette espèce. Or on doit à M. NEVANLINNA aussi le théorème inverse: Toute fonction méromorphe de caractéristique bornée peut s'écrire comme un quotient de

deux fonctions bornées. M. NEVANLINNA en tire la conclusion importante que les valeurs limites radiales  $\lim_{r \rightarrow R} w(re^{i\varphi})$  d'une telle fonction existent presque partout sur la circonférence  $|z| = R$ . En effet, écrivons

$$w(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

où  $f(z)$  et  $g(z)$  sont deux fonctions holomorphes et bornées dans  $|z| < R$ . Alors, les valeurs limites radiales de  $f(z)$  et de  $g(z)$  existent presque partout sur  $|z| = R$  (théorème de FATOU), et celles de  $w(z)$  s'expriment par leurs quotients, à condition que ceux-ci ne soient pas indéterminés. Ceci peut arriver tout au plus dans l'ensemble où les valeurs limites de  $f(z)$  et de  $g(z)$  s'annulent simultanément, et cet ensemble est de mesure nulle comme l'apprend un théorème bien connu de MM. F. et M. RIESZ.<sup>3</sup> Par conséquent, les valeurs limites radiales de  $w(z)$  existent presque partout.

Aux valeurs limites de  $w(z)$  correspond un ensemble de points  $E_w$  sur la sphère des  $w$ . Quant à la mesure de cet ensemble, M. NEVANLINNA<sup>4</sup> a démontré qu'elle ne peut être trop petite; plus précisément, si  $E_w$  a la mesure logarithmique zéro,  $w(z)$  se réduit à une constante. Nous établirons ici le théorème suivant, qui est le plus exact possible et qui contient la proposition de M. NEVANLINNA:

**THÉORÈME.** *Les valeurs limites radiales d'une fonction méromorphe de caractéristique bornée, ne se réduisant pas à une constante, forment un ensemble  $E_w$  dont la capacité logarithmique est  $> 0$ .*

En mesurant toujours les distances dans le plan des  $w$  par la distance cordale nous pouvons raisonner directement sur les  $w$  dans toutes les questions qui concernent la convergence, la continuité etc. de nombres complexes dans ce plan. Cela posé, comme les valeurs limites radiales de  $w(re^{i\varphi})$  existent pour presque toutes les valeurs de l'argument  $\varphi$ , c'est-à-dire dans un ensemble des  $\varphi$  de mesure  $2\pi$ , on peut, d'après le théorème d'EGOROFF, trouver un ensemble mesurable  $E_\varphi$  de ces  $\varphi$  de mesure  $\eta > 2\pi - \varepsilon$  dans lequel la convergence vers les valeurs limites  $w(re^{i\varphi})$  est uniforme. On peut d'ailleurs supposer cet ensemble fermé; dans ce cas,

<sup>3</sup>F. et M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Quatrième congrès des math. scand. à Stockholm* (1916).

<sup>4</sup>R. NEVANLINNA, Ueber die Randwerte von analytischen Funktionen, *Comment. Math. Helvet.* **2** (1930).

son image  $E'_w \subset E_w$  sur la sphère sera aussi fermée. En effet, la convergence étant uniforme dans  $E_\varphi$ , la fonction limite  $w(Re^{i\varphi})$  est continue dans ledit ensemble. Or l'image d'un ensemble fermé par l'entremise d'une fonction continue est elle-même un ensemble fermé.

Notre théorème sera maintenant établi si nous prouvons que la capacité de  $E'_w$  est  $> 0$ . Recouvrons cet ensemble par un nombre fini de domaines sphériques  $D$ , dont les frontières satisfont à de telles conditions de régularité que le problème du potentiel d'équilibre puisse être résolu. De plus, ces domaines peuvent être choisis de manière que leur capacité soit aussi rapprochée que l'on voudra de celle de l'ensemble  $E'_w$ . Sur les domaines  $D$  nous répartissons la masse unité en équilibre et nous désignons par  $V$  le potentiel constant engendré par cette distribution ( $\mu$ ). Il vient alors par la formule (1) du n° 51:

$$\begin{aligned} T(r) &= \int_\omega N(r, a) d\mu(a) + \frac{1}{2\pi} \int_\omega d\mu(a) + \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi, \\ &\geq \int_\omega N(r, a) d\mu(a) + \frac{1}{2\pi} \int_\omega d\mu(a) + \int_{E_\varphi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi. \end{aligned}$$

Pour une valeur fixée  $r = r_0$ , d'ailleurs quelconque,  $N(r_0, a)$  est une fonction continue de  $a$ . Elle satisfait par conséquent pour toutes les valeurs de  $a$  à une certaine inégalité  $N(r_0, a) > -\gamma$ , où  $\gamma$  est une constante convenable, et, puisque  $N(r, a)$  est non décroissante avec  $r$ , cette inégalité subsiste encore pour  $r > r_0$ . De plus, pour  $r$  suffisamment grand et pour l'argument  $\varphi$  dans l'ensemble  $E_\varphi$ , le point  $w(re^{i\varphi})$  se trouve à l'intérieur des domaines  $D$ , de sorte que  $u(w(re^{i\varphi})) = V$ . Alors, on aura pour  $r$  tendant vers  $R$

$$T(R) = \lim_{r \rightarrow R} T(r) > -\gamma + \frac{\eta}{2\pi} V,$$

c'est-à-dire

$$V < \frac{2\pi}{\eta} (T(R) + \gamma).$$

D'où il vient (n° 26),  $D$  étant un domaine quelconque contenant l'ensemble  $E'_w$ ,

$$C(E_w) \geq C(E'_w) \geq e^{-\frac{2\pi}{\eta}(T(R)+\gamma)} > 0.$$

C. Q. F. D.

REMARQUE. Une légère modification de la démonstration nous donne en réalité un peu plus: *A tout ensemble mesurable de points frontières  $z = Re^{i\varphi}$  de mesure (linéaire) positive correspond au moyen d'une fonction méromorphe de caractéristique bornée, ne se réduisant pas à une constante, un ensemble de valeurs limites radiales sur la sphère de Riemann dont la capacité logarithmique est positive.*

**53.** Nous avons déjà dit que le théorème établi tout à l'heure donne la meilleure appréciation possible de l'étendue de l'ensemble  $E_w$ . Pour élucider ce fait nous démontrons une réciproque.

THÉORÈME. *Étant donné un ensemble fermé quelconque  $E_w$ , de capacité logarithmique positive sur la sphère de Riemann, il existe une infinité de fonctions méromorphes dans le cercle unité  $|z| < 1$ , dont les fonctions caractéristiques sont bornées et dont toutes les valeurs limites sont contenues dans l'ensemble  $E_w$ .*

Nous nous servons d'une construction connue, également employée par M. NEVANLINNA<sup>5</sup> pour résoudre le même problème; toutefois, sous l'hypothèse que la mesure  $H'$  de l'ensemble  $E_w$  est  $> 0$  par rapport à une fonction  $h(t)$  satisfaisant aux conditions du théorème 1 du n° 47.

Remarquons d'abord que le seul cas intéressant est celui où  $E_w$ , n'a aucun point intérieur et ne découpe pas la sphère en plusieurs domaines connexes, les autres se résolvant tout naturellement par des représentations conformes du cercle unité sur des domaines simples dans le plan des  $w$ . Cela étant, construisons par des prolongements successifs une surface de superposition riemannienne, ayant tout point de  $E_w$ , comme point de ramification d'ordre infini dans tous les feuillets et sans autres points frontières ou points de ramification ( la surface de superposition fondamentale couvrant le complémentaire de  $E_w$ ). Cette surface est simplement connexe et d'après le théorème général d'uniformisation, elle peut être représentée conformément sur un domaine simple du plan des  $z$ , la représentation pouvant

<sup>5</sup> *Comment. Math. Helvet.*, loc. cit.

toujours se faire sur le cercle unité si  $E_w$  contient au moins trois points. De plus, on peut faire correspondre le point  $z = 0$  et la direction de l'axe réel à un point choisi à volonté sur la surface, et à une direction arbitraire en ce point. Les différentes fonctions de représentation ainsi obtenues sont méromorphes et automorphes dans le cercle unité et se transforment l'une dans l'autre par une transformation linéaire de  $z$ .

Prenons une telle fonction  $w(z)$ , je dis que sa caractéristique  $T(r)$  est bornée. En effet, tout point  $a$  de l'ensemble  $E_w$  représente une *valeur lacunaire* de  $w(z)$ , c'est-à-dire que  $w(z) \neq a$  dans son domaine d'existence; donc,  $N(r, a)$  est égale à une constante pour toute valeur de  $a$  appartenant à  $E_w$ . Cette constante est d'ailleurs, d'après notre choix de la constante d'intégration dans la formule fondamentale (1) du n° 50, égale à  $-m(0, a)$ . Alors, comme la capacité de  $E_w$ , est  $> 0$  par hypothèse, on peut faire une distribution fz de la masse unité sur  $E_w$ , de façon que son potentiel soit borné ( $\leq K$ ) sur la sphère. D'où il vient par la formule (1) du n° 51

$$\begin{aligned} T(r) &= \int_w N(r, a) d\mu(a) + \frac{1}{2\pi} \int_w d\mu(a) + \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi, \\ &< \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi \leq K. \end{aligned}$$

Cela prouvé, les valeurs limites radiales de  $w(z)$  existent presque partout sur  $z = 1$ , et il ne nous reste plus qu'à faire observer qu'une telle valeur est toujours contenue dans l'ensemble  $E_w$ . En effet, considérons une courbe quelconque allant de l'origine  $z = 0$  à un point de la circonférence  $z = 1$ , et supposons que la limite de  $w(z)$  existe quand  $z$  tend vers le point frontière le long de cette courbe. Son image sur la surface de Riemann se projette sur la sphère simple dans une certaine courbe, non nécessairement simple, allant du point  $w = w(0)$  et aboutissant en un point  $w = w_1$  (parce que la limite existe), et ce point est manifestement la projection d'un point frontière de la surface. Par conséquent,  $w_1$  appartient à l'ensemble  $E_w$ .

**54.** Si l'on faisait la construction précédente de la surface de superposition avec un ensemble  $E_w$  de points frontières de capacité logarithmique nulle, on tomberait sur des fonctions de représentation  $w(z)$  dont les caractéristiques seraient non bornées. En fait, si la caractéristique  $T'(r)$  d'une

telle fonction était bornée, les valeurs limites existantes formeraient un ensemble de capacité  $> 0$  sur la sphère des  $w$ , ce qui cependant est impossible car toute valeur limite est, comme nous venons de le voir, contenue dans l'ensemble  $Ew$ . On devrait observer que cet ensemble fermé peut être absolument quelconque, le complémentaire constituant toujours un domaine connexe.

Cet exemple met en évidence que les valeurs lacunaires d'une fonction méromorphe de caractéristique non bornée peuvent former un ensemble fermé quelconque de capacité logarithmique nulle. D'autre part, la distinction des deux types de fonctions méromorphes consiste dans cette mesure, comme le montre le théorème suivant, dont la démonstration ressort immédiatement de la formule (1) du n° 51.

**THÉORÈME.** *Si la fonction  $N(r, a)$ , mesurant la distribution des racines de l'équation  $w(z) = a$ , reste bornée pour un ensemble de valeurs de  $a$  de capacité logarithmique  $> 0$  (non nécessairement d'une manière uniforme), la fonction caractéristique  $T(r)$  de  $w(z)$  est bornée.*

En désignant par  $z_k(a)$  les points dans le cercle  $|z| < R$  où  $w(z) = a$ , on a souvent à considérer la somme des distances des  $z_k(a)$  à la périphérie du cercle

$$S(a) = \sum_k (R - |z_k(a)|).$$

Il est facile de prouver que cette somme est convergente ou divergente selon que la fonction  $N(r, a)$  est bornée ou non. D'où il suit que le théorème précédent peut encore s'énoncer sous la forme suivante:

*Si la somme  $S(a)$  converge pour un ensemble de valeurs de  $a$  de capacité logarithmique  $> 0$ , elle converge pour toute valeur de  $a$  sans exception. Au contraire, il existe des fonctions méromorphes telles que  $S(a)$  converge pour un ensemble fermé de valeurs de capacité nulle, donné à l'avance, et diverge pour toutes les autres.*

**55. Valeurs exceptionnelles d'une fonction de caractéristique non bornée.** — Abordons maintenant de plus près la question de la distribution des valeurs admises par une fonction méromorphe, dont nous supposerons préalablement que sa caractéristique  $T(r)$  tend vers l'infini pour  $r$  tendant

vers  $R$ . On a ici le célèbre théorème de M. PICARD, d'après lequel une fonction, méromorphe dans tout le plan, a au plus deux valeurs lacunaires. Pour aller plus loin on a encore à tenir compte des valeurs qui assurément sont admises par la fonction mais moins fréquemment que les autres. A cet effet, divisons l'équation fondamentale (1) du n° 50 par  $T(r)$  et appelons avec M. NEVANLINNA la valeur limite

$$\delta(a) = \liminf_{r \rightarrow R} \frac{m(r, a)}{T(r)} = 1 - \limsup \frac{N(r, a)}{T(r)}$$

le défaut de la valeur  $a$ . Ce nombre satisfait évidemment à l'inégalité  $0 \leq \delta(a) \leq 1$ , et sa dénomination est justifiée par le fait que  $\delta(a)$  est d'autant plus grand que la valeur  $a$  est omise par la fonction  $w(z)$ . En particulier,  $\delta(a)$  est égal au maximum un si  $a$  est une valeur lacunaire ou, plus généralement, si  $N(r, a)$  reste bornée.

On doit à M. NEVANLINNA un *second théorème fondamental*, caractérisant l'ordre de grandeur asymptotique des quantités  $N$ ,  $m$  et  $T$ . Nous ne nous occuperons pas ici de ce théorème, remarquons seulement qu'on peut en tirer la conclusion importante que la somme des défauts est  $\leq 2$ , toujours, si  $R = +\infty$ , et pour  $R$  fini, si  $T(r)$  croît vers l'infini plus vite que  $\log(1/(R - r))$ . Le théorème de M. PICARD en est évidemment un cas particulier; d'une manière plus générale, il en résulte que pour lesdites fonctions les valeurs  $a$  de défaut positif, qu'on appelle aussi les *valeurs exceptionnelles*, forment un ensemble dénombrable. Dans le cas le plus général M. AHLFORS<sup>6</sup> a démontré que l'ensemble desdites valeurs a une mesure  $H'$  égale à zéro par rapport à toute fonction  $h(t)$ , telle que l'intégrale  $\int_0^\varepsilon h(t)/t dt$  converge (cf. n° 47). Nous établirons ici le théorème suivant, contenant celui de M. AHLFORS:

**THÉORÈME.** *Les valeurs exceptionnelles forment un ensemble dont la capacité logarithmique est nulle.*

En effet, soit  $E$  un ensemble quelconque de capacité  $> 0$  sur la sphère de Riemann. Répartissons la masse unité sur cet ensemble de manière que le potentiel correspondant soit borné, nous aurons,  $\mu$  étant la distribution,

<sup>6</sup>L. AHLFORS, Sur quelques propriétés des fonctions méromorphes, *C. R. de l'Ac. des Sci. Paris* **190** (1930), pp. 720722.

—, Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen, *Comment. phys.-math. Soc. Sci. Fenn.* **5** (1931).

$u$  son potentiel:

$$1 = \int_E \frac{N(r, a)}{T(r)} d\mu(a) + \frac{1}{2\pi T(r)} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi.$$

Puisque  $T(r)$  tend vers l'infini pour  $r \rightarrow R$ , le dernier terme s'évanouit à la limite, et l'on a

$$\lim_{r \rightarrow R} \int_E \frac{N(r, a)}{T(r)} d\mu(a) = 1.$$

Ici  $\frac{N(r, a)}{T(r)}$  est une fonction continue de  $a$ , sa plus grande limite quand  $r$  tend vers  $R$  est donc mesurable  $B$ , et l'on peut faire le passage à la limite sous le signe  $\int$ . Il vient ainsi

$$1 = \lim_{r \rightarrow R} \int_E \frac{N(r, a)}{T(r)} d\mu(a) \leq \int_E \limsup \frac{N(r, a)}{T(r)} d\mu(a) \leq 1.$$

On en tire immédiatement

$$\int_E [1 - \delta(a)] d\mu(a) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\int_E \delta(a) d\mu(a) = 0.$$

Cela étant, il en résulte que l'ensemble  $A_\varepsilon$  des valeurs de  $a$  telles que  $\delta(a) > \varepsilon > 0$ , où  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, est de capacité nulle. Or, cet ensemble est mesurable  $B$ , l'ensemble

$$A_{\varepsilon_1} + A_{\varepsilon_2} + \dots + A_{\varepsilon_n} + \dots,$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  sont des nombres positifs arbitraires tendant vers zéro, est donc aussi de capacité nulle (n° 27, 3°). Par conséquent, l'ensemble des valeurs exceptionnelles est nécessairement de capacité nulle.

Pour  $R = \infty$ , le théorème qu'on vient de démontrer est contenu dans l'énoncé plus précis de M. NEVANLINNA, mentionné plus haut; au contraire, pour  $R$  fini et sans aucune condition supplémentaire sur la croissance de  $T(r)$ , il ne peut être amélioré essentiellement. En effet, nous avons déjà remarqué que  $\delta(a)$  atteint son maximum un si  $N(r, a)$  reste bornée pour tous les  $r < R$ , et, comme on a vu plus haut (n° 54), cela peut arriver pour toutes les valeurs  $a$  d'un ensemble fermé de capacité logarithmique nulle, donné à l'avance.

## 2. Fonctions holomorphes dans le cercle unité.

**56. Fonctions de la classe  $\mathcal{U}$ .** — Les régularités qu'on a rencontrées quant à la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dont la caractéristique croît vers l'infini, ne se retrouvent pas en général si cette quantité reste bornée dans le domaine d'existence de la fonction méromorphe. Or il ne faut non plus s'attendre à autre chose si l'on se rend compte de la grande variété des fonctions appartenant à cette classe. Conformément à cela, la notion de défaut ne se prête pas directement à ces fonctions. Cependant, si l'on se restreint aux fonctions  $w(z)$  dont les surfaces de RIEMANN, correspondant aux fonctions inverses, sont suffisamment régulières, nombre de résultats antérieurs ou de résultats analogues restent encore valables. Il en sera ainsi p. ex. si cette surface est étalée sur un domaine borné  $D$  du plan des  $w$  et si chacun de ses feuilletts épuise ce domaine si bien que le bord externe de chaque feuillet se projette toujours sur le même contour dans le plan simple, à savoir sur le contour de  $D$ .

Dans ce qui suit nous allons supposer que le domaine  $D$  soit le cercle unité  $|w| < 1$  et que la fonction  $w(z)$  fasse correspondre le cercle unité  $|z| < 1$  dans le plan des  $z$  à une surface de RIEMANN étalée sur le premier cercle. Alors,  $w(z)$  est une fonction holomorphe dans  $|z| < 1$  et son module est toujours  $\leq 1$ . Nous exprimerons sous forme analytique l'exigence d'épuisement en admettant que ledit module tende vers l'unité presque partout sur la circonférence  $|z| = 1$ . Les fonctions ainsi définies constituent une classe  $\mathcal{U}$  qui est fermée en elle-même par rapport à toutes les substitutions linéaires laissant  $w = 1$  invariant; c'est-à-dire que, si  $w(z)$  est une fonction de la classe  $\mathcal{U}$ , il en sera de même de la fonction transformée

$$w_1(z) = e^{i\gamma} \frac{a - w(z)}{1 - \bar{a}w(z)} \quad (\gamma \text{ réel}, |a| < 1).$$

Parmi les fonctions qui s'y rapportent, les plus simples et en même temps les plus importantes sont les substitutions linéaires de  $z$  conservant le cercle unité  $|z| \leq 1$ , et les produits finis ou infinis de celles-ci. Un tel produit s'écrit dans tous les cas

$$e^{i\gamma} z^m \prod_k \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \quad (\gamma \text{ réel}, m \text{ un entier} \geq 0, 0 < |a_k| < 1).$$

où l'on peut supposer que les  $a_k$  soient ordonnés suivant des modules croissants. Si le produit est infini, on aura convergence dès que la somme des

distances  $\sum(1 - |a_k|)$  est convergente, et il est alors facile de démontrer que la fonction appartient à la classe  $\mathcal{U}$ . C'est M. BLASCHKE<sup>7</sup> qui le premier a attiré l'attention sur ces fonctions; on les appelle souvent pour cette raison *produits de BLASCHKE*. Nous les désignerons dans la suite par  $B(z)$ .

**57. Forme canonique.** — Soit maintenant  $w(z)$  une fonction quelconque de  $\mathcal{U}$  ou, plus généralement, une fonction holomorphe quelconque de module  $\leq 1$  dans le cercle unité. Cherchons une représentation de celle-ci, en premier lieu pour  $|z| \leq r < 1$ , qui met en évidence les zéros intérieurs à ce cercle et qui conserve le module sur la circonférence. Admettons pour simplifier que  $w(0) \neq 0$  et de même que  $w(z) \neq 0$  pour  $|z| = r$ . En désignant alors par  $a_1, a_2, \dots$  les zéros, on peut écrire

$$w(z) = A_r(z) \prod_{|a_k| < r} \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{r(a_k - z)}{r^2 - \overline{a_k}z} = A_r(z)B_r(z),$$

où  $A_r(z)$  est une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans  $|z| < r$ . Au logarithme de  $A_r(z)$  nous pouvons appliquer la formule de POISSON, qui nous donne,  $\gamma$  étant une constante réelle,

$$\begin{aligned} \log A_r(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \log |A_r(re^{i\theta})| d\theta + i\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \log |w(re^{i\theta})| d\theta + i\gamma, \end{aligned}$$

puisque  $|A_r(z)| = |w(z)|$  pour  $|z| = r$ . Posons maintenant

$$\mu_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta \log \frac{1}{|w(re^{it})|} dt,$$

cette fonction de  $\theta$  est non décroissante et bornée supérieurement par la constante  $\log \frac{1}{|w(0)|}$ , indépendamment de  $r$ .<sup>8</sup> En considérant  $\mu_r(\theta)$  comme

<sup>7</sup>W. BLASCHKE, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, *Leips. Ber.* **67** (1915).

<sup>8</sup>En effet, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\theta})| d\theta = \log |A_r(0)| \geq \log |w(0)|.$$

la distribution d'une masse positive sur  $|z| = r$ , on peut écrire sous forme d'une intégrale de STIELTJES

$$\log A_r(z) = - \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} d\mu_r(\theta) + i\gamma.$$

D'où il résulte

$$w(z) = B_r(z) e^{-\int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} d\mu_r(\theta) + i\gamma}.$$

Si l'on fait ici tendre  $r$  vers l'unité,  $B_r(z)$  tend vers un produit de BLASCHKE contenant tous les zéros de  $w(z)$ , et la distribution  $\mu_r$  sur  $|z| = r$  tend vers une distribution  $\mu$  sur  $|z| = 1$ . On aura alors

$$w(z) = A(z)B(z),$$

avec

$$A(z) = e^{-\int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\theta} + z}{r e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) + i\gamma}$$

et

$$B(z) = \prod_k \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}.$$

De cette forme canonique des fonctions bornées dans le cercle unité, qui est due à M. F. RIESZ,<sup>9</sup> on peut tirer des conclusions importantes sur les fonctions de la classe  $\mathcal{U}$ . Les valeurs limites radiales de  $B(z)$  ayant le module un presque partout sur  $|z| = 1$ , celles de  $A(z)$  doivent jouir de la même propriété. Cela revient à dire que la fonction harmonique de  $z = r e^{i\varphi}$

$$v(z) = \log \frac{1}{|A(z)|} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\mu(\theta)$$

a des valeurs limites radiales égales à zéro presque partout sur  $|z| = l$ . Or pour presque tous les  $\theta$  la fonction  $\mu(\theta)$ , qui est non décroissante, a une dérivée bien déterminée, et d'après un théorème connu de FATOU cette dérivée concide presque partout avec la valeur limite de  $v(z)$ . D'où il suit que  $\mu'(\theta) = 0$  presque partout, c'est-à-dire que  $\mu(\theta)$  est dans le cas général la somme d'une *fonction des sauts*  $\eta(\theta)$  et d'une fonction continue singulière  $\nu(\theta)$ , les deux composantes  $\eta(\theta)$  et  $\nu(\theta)$  qui sont non décroissantes, ne

<sup>9</sup>F. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschr.* **18** (1923).

pouvant pas s'évanouir simultanément à moins que  $\mu(\theta)$  ne se réduise à une constante.<sup>10</sup>

**58. Conditions pour qu'une fonction soit un produit de Blaschke.** —

Étudions maintenant un problème qui se pose tout naturellement: Quelles sont les conditions pour que  $w(z)$  se réduise à un produit de BLASCHKE? Il faut et il suffit pour cela que  $A(z)$  se réduise à une constante de module  $un$ , c'est-à-dire que la masse totale sur  $|z| = 1$  s'annule. Or cette masse est donnée par la limite, toujours existante,

$$\mu(2\pi) - \mu(0) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|w(re^{i\varphi})|} d\varphi,$$

et nous aurons par conséquent le théorème suivant dû à M. M. RIESZ.<sup>11</sup>

THÉORÈME 1. *Pour que la fonction  $w(z)$ , holomorphe et de module  $\leq 1$  dans le cercle unité, soit un produit de BLASCHKE, il faut et il suffit que*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi})| d\varphi = 0.$$

Nous pouvons donner un autre théorème de ce genre qui certes n'apporte qu'une condition suffisante mais qui dans bien des cas particuliers est plus pratique que le précédent.

THÉORÈME 2. *Une fonction  $w(z)$  holomorphe dans le cercle unité et appartenant à la classe  $\mathcal{U}$ , est un produit de BLASCHKE si elle n'admet pas zéro comme valeur limite radiale.*<sup>12</sup>

<sup>10</sup>Voir M. RIESZ, Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions, *Fysiogr. Sällsk. Lund förh.* **1** (1931).

<sup>11</sup>Le théorème est ici publié pour la première fois. La démonstration primordiale de M. RIESZ est plus élémentaire et ne s'appuie pas sur la forme canonique. En supprimant l'hypothèse  $|w(z)| \leq 1$ , la condition devient

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |w(re^{i\varphi})|| d\varphi = 0.$$

<sup>12</sup>Ce théorème a été publié pour la première fois dans une Note de M. HÖSSJER et l'auteur du présent travail, Über die Ausnahmestellen eines Blaschkeproduktes, *Fysiogr.*

Ce théorème sera prouvé si nous démontrons que toute fonction  $A(z)$  de  $\mathcal{U}$ , ne se réduisant pas à une constante, a une valeur limite radiale égale à zéro en un point au moins sur  $|z| = 1$ . A cet effet, considérons de plus près l'allure de la fonction  $v(z) = \log \frac{1}{|A(z)|}$  lorsque  $z$  tend radialement vers un point  $e^{i\varphi}$  sur la frontière. Pour  $|\theta - \varphi| \leq 1 - r = \delta$  on a<sup>13</sup>

$$\cos |\theta - \varphi| \geq 1 - \frac{(1-r)^2}{2!} + \dots > 1 - \frac{(1-r)^2}{2},$$

ce qui donne

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} > \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\left[1-\frac{(1-r)^2}{2}\right]} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{\delta}.$$

Puisque tous les éléments d'intégration dans l'intégrale exprimant  $v(z)$  sont non négatifs,  $v(z)$  est toujours plus grande que l'intégrale étendue à un intervalle de  $\theta$  de longueur  $2\delta$ , si petite qu'elle soit, de manière que pour  $|z| = r$

$$v(z) \geq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\mu(\theta) > \frac{1}{\delta} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} d\mu(\theta).$$

Si maintenant l'argument  $\varphi$  est un point de saut pour  $\mu(\theta)$ , on a pour tout  $\delta$

$$\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} d\mu(\theta) \geq h > 0,$$

donc,

$$v(z) > \frac{h}{\delta} = \frac{h}{1-r}.$$

Alors,  $v(z)$  tend vers l'infini et par conséquent  $A(z)$  vers zéro pour  $z \rightarrow e^{i\varphi}$ .

Or il pourrait arriver que  $\mu(\theta)$  se réduise à la fonction singulière  $\nu(\theta)$ , qui est continue; la démonstration ci-dessus ne serait alors plus applicable.

---

*Sallsk. Lund förh.* **3** (1933).

Indépendamment de nous, M. SEIDEL l'a prouvé dans un Mémoire dans les *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **36** (1934), On the distribution of values of bounded analytic functions, théorèmes 2 et 11, pp. 205 et 215.

<sup>13</sup>Les calculs ci-dessus se retrouvent dans la Thèse de FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30** (1906), p. 340.

Cependant, toute fonction continue singulière a des dérivées infinies (à droite ou à gauche) dans un ensemble de mesure nulle, d'ailleurs, non dénombrable, sinon la fonction se réduirait à une constante.<sup>14</sup> Puisque  $\nu(\theta)$  est non décroissante, ses dérivées sont toujours  $\geq 0$ ; nous pouvons alors supposer que la dérivée symétrique

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(\varphi + \delta) - \mu(\varphi - \delta)}{2\delta} = +\infty$$

au point  $\varphi$ . On aura par conséquent

$$\lim_{r \rightarrow 1} \nu(re^{i\varphi}) \geq \frac{1}{\delta} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} d\mu(\theta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(\varphi + \delta) - \mu(\varphi - \delta)}{2\delta} = +\infty,$$

de manière que  $A(z)$  tend vers zéro encore dans ce cas.

Nous avons déjà indiqué que ce dernier théorème ne donne qu'une condition suffisante; on le voit tout de suite par l'exemple

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{1}{k^2}) - z}{1 - (1 - \frac{1}{k^2})z},$$

qui présente un produit de BLASCHKE ayant la valeur limite zéro au point  $z = l$ . En effet, pour  $1 - 1/k^2 < z < 1 - 1/(k+1)^2$  module de ce produit est plus petit que le module du seul facteur

$$\frac{(1 - \frac{1}{k^2}) - z}{1 - (1 - \frac{1}{k^2})z},$$

qui pour ces  $z$  est de l'ordre de grandeur  $1/k$ .

**59. Valeurs exceptionnelles d'une fonction de la classe  $\mathcal{U}$ .** — L'application du premier théorème fondamental de M. NEVANLINNA à la théorie des valeurs exceptionnelles d'une fonction méromorphe se base essentiellement sur le fait que la fonction caractéristique  $T(r)$  tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers la frontière. Dans le cas actuel il n'en est pas ainsi, mais on

<sup>14</sup>Voir p. ex. C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse I*, 3<sup>ième</sup> édition (1914), p. 100. — C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, zweite Auflage (1927), p. 580.

verra qu'avec des modifications légères des notations on peut encore tirer quelques conclusions importantes dans le même ordre d'idées que dans le cas précédent. A cet effet, posons

$$L(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{a}w(re^{i\varphi})}{a - w(re^{i\varphi})} \right| d\varphi$$

où l'on suppose  $|a| < 1$ ,  $w(z) \neq a$  pour  $|z| = r$ . L'application de la formule de GAUSS à la fonction  $\log \left| \frac{1 - \bar{a}w}{a - w} \right|$  nous donne

$$(1) \quad n(r, a) + r \frac{\partial}{\partial r} L(r, a) = 0.$$

En intégrant cette équation divisée par  $r$ , on aura

$$(2) \quad N(r, a) + L(r, a) = \text{const.},$$

ce qui constitue la nouvelle forme du théorème de M. NEVANLINNA.

REMARQUE. On pourrait aussi intégrer l'équation (1) directement; on tombe alors par une intégration par parties sur l'identité

$$\sum_{|z_k(a)| < r} (r - |z_k(a)|) + rL(r, a) = \int_0^r L(t, a) dt$$

où les  $z_k(a)$  désignent les valeurs de  $z$  où  $w(z) = a$ . Cette formule ou, plutôt, celle qui en résulte pour  $r \rightarrow 1$

$$\sum_{|z_k(a)| < r} (1 - |z_k(a)|) + \lim_{r \rightarrow 1} L(r, a) = \int_0^1 L(t, a) dt$$

peut remplacer la formule (2); toutefois, il y a lieu d'observer que le dernier terme n'est pas ici indépendant de  $a$ .

La valeur moyenne  $L(r, a)$  définie plus haut est pour tout  $a$  de module  $< 1$  une fonction non croissante de  $r$  qui pour  $r \rightarrow 1$  tend vers un nombre positif ou zéro. Appelons ce nombre  $\delta(a)$ ,

$$\delta(a) = \lim_{r \rightarrow 1} L(r, a),$$

nous le définissons comme le *défaut* de la valeur  $a$  relativement à la fonction  $w(z)$  donnée. Pour justifier cette dénomination, remarquons d'abord qu'au point de vue formel, le défaut défini ici correspond tout à fait à la même notion dans la théorie des fonctions méromorphes. De plus, si  $\delta(a) = 0$ , la fonction  $\frac{1 - \bar{a}w(z)}{a - w(z)}$  est un produit de BLASCHKE (n° 58, 1); c'est-à-dire, un produit formé par des facteurs linéaires, s'annulant aux points de  $z$  où  $w(z) = a$ , et l'on doit dire, dans ce cas, que  $a$  est une valeur normale relative à  $w(z)$ . Au contraire, si  $\delta(a) > 0$ , ladite fonction  $\frac{1 - \bar{a}w(z)}{a - w(z)}$  ne se réduit pas à un produit de BLASCHKE mais contient toujours un facteur de type  $A(z)$ , indiquant, dans le cas où  $w(z)$  appartient à la classe  $\mathcal{U}$ , que la fonction inverse de  $w(z)$  a une ou plusieurs singularités transcendentes au point  $w = a$ . Nous dirons, comme dans le cas des fonctions méromorphes, que les valeurs de  $a$  de défaut positif sont *exceptionnelles*, en particulier, les valeurs lacunaires qui ne sont pas admises par la fonction dans  $|z| < 1$ , sont exceptionnelles.

Les notions de défaut et de valeur exceptionnelle définies ci-dessus sont exclusivement adaptées aux fonctions de la classe  $\mathcal{U}$ ; pour les autres fonctions, holomorphes ou méromorphes dans le cercle unité, il nous semble qu'elles n'aient aucun intérêt particulier. D'autre part, pour ces fonctions-là le théorème du n° 55 reste encore valide, en se bornant, bien entendu, aux valeurs de module  $< 1$ .

**THÉORÈME.** *Les valeurs exceptionnelles d'une fonction de la classe  $\mathcal{U}$ , contenues dans le cercle unité  $|w| < 1$ , forment un ensemble dont la capacité logarithmique est nulle.*

En effet, soit  $E$  un ensemble de points  $w$  de capacité  $> 0$ , pour fixer les idées nous supposons que  $E$  est intérieur au cercle  $|w| < \rho < 1$ . Sur cet ensemble nous pouvons répartir la masse unité de façon que le potentiel devienne borné en tout point du cercle unité. D'où il suit que le "potentiel" formé avec le noyau de GREEN

$$u(w) = \int_E \log \left| \frac{1 - \bar{a}w}{a - w} \right| d\mu(a)$$

est borné dans ledit cercle et s'annule d'une manière continue sur la frontière

$|w| = 1$ . Posons maintenant  $w = w(re^{i\varphi})$  et prenons la valeur moyenne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi &= \int_E d\mu(a) \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{a}w}{a - w} \right| d\varphi \\ &= \int_E L(r, a) d\mu(a). \end{aligned}$$

Faisant tendre  $r$  vers l'unité, on aura,  $L(r, a)$  tendant vers  $\delta(a)$  en décroissant,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi = \int_E \delta(a) d\mu(a).$$

D'autre part, pour  $r \rightarrow 1$  et pour presque tous les  $\varphi$  le point  $w(re^{i\varphi})$  tend vers la frontière  $|w| = 1$  où  $u(w)$  s'annule identiquement. Puisque cette fonction est bornée, on aura d'après un théorème connu de M. LEBESGUE

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(e^{i\varphi})) d\varphi = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_E \delta(a) d\mu(a) = 0.$$

D'où il suit immédiatement que  $\delta(a)$  s'annule partout dans  $|w| < 1$ , sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle.

**60.** Ajoutons encore une remarque supplémentaire. La définition du défaut  $\delta(a)$  et la propriété de ce nombre, énoncée dans le théorème qu'on vient de démontrer, mettent en évidence que la fonction transformée  $\frac{a - w(z)}{1 - \bar{a}w(z)}$  est un produit de BLASCHKE  $B(z)$  pour "presque" toutes les valeurs du paramètre  $a$ . C'est-à-dire que toute fonction  $w(z)$  de la classe  $\mathcal{U}$  peut s'écrire, et cela d'une infinité de manières, comme une fonction linéaire d'un produit de BLASCHKE, à savoir

$$w(z) = \frac{a - B(z)}{1 - \bar{a}B(z)}.^{15}$$

<sup>15</sup>Cf. W. SEIDEL, loc. cit., p. 215, où ce point reste sans réponse.

**61.** Nous allons maintenant prouver que la capacité logarithmique nulle est la, mesure la plus exacte de l'ensemble des valeurs exceptionnelles d'une fonction  $w(z)$  appartenant à la classe envisagée. Pour le voir nous faisons une construction tout analogue à celle que nous avons faite dans la démonstration du théorème du n° **53**. En effet, désignons par  $O$  le cercle ouvert  $|w| < 1$  et soit  $F$  un ensemble de capacité logarithmique nulle, contenu dans  $O$  et, fermé relativement à ce domaine, c'est-à-dire que l'ensemble  $F$  augmenté de ses points frontières sur  $|w| = 1$  est fermé. L'ensemble complémentaire  $O - F$  constitue alors un domaine connexe (n° **49**) sur lequel nous pouvons construire une surface de superposition  $W$  par le procédé de prolongement déjà cité.

En représentant cette surface conformément, sur le cercle unité  $|z| < 1$  on obtient des fonctions qui sont holomorphes et de module  $< 1$  dans ce cercle. Le théorème de FATOU nous apprend que les valeurs limites radiales d'une telle fonction  $w(z)$  existent presque partout sur  $|z| = 1$ ; de plus, toute valeur limite se représente dans le plan des  $w$  par un point ou bien situé sur la périphérie  $w = 1$  ou bien contenu dans  $F$ . Désignons par  $E_1$ , et  $E_2$ , les ensembles de points frontières  $z = e^{i\varphi}$  correspondant respectivement à ces deux catégories de valeurs limites. Nous démontrerons dans un instant que la mesure (linéaire) de  $E_2$  est nulle, d'où il résultera immédiatement que la fonction  $w(z)$  appartient à la classe  $\mathcal{U}$ . Or pour cette fonction toute valeur de  $F$  est lacunaire, on aura donc l'exemple d'une fonction de  $\mathcal{U}$  ayant un ensemble de valeurs exceptionnelles de capacité logarithmique nulle, donné à l'avance. Toutefois, il faut remarquer que cet ensemble est fermé relativement à  $O$ .

Pour prouver que la mesure de  $E_2$  est nulle, il suffit de faire observer que si la mesure de  $E_2$ <sup>16</sup> était positive, les valeurs limites  $w(e^{i\varphi})$  correspondantes formeraient un ensemble à l'intérieur de  $|w| < 1$  de capacité non nulle (n° **52**, remarque). Mais cela est impossible, toute valeur de cette espèce étant contenue dans l'ensemble  $F$ .

REMARQUE. Si l'on sait à l'avance que la mesure de  $E_2$  est nulle, on en tire inversement par le dernier théorème que l'ensemble  $F$  est de capacité nulle. C'est-à-dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que*

<sup>16</sup>L'ensemble  $E_2$  est certainement mesurable, car, la fonction limite  $w(e^{i\varphi})$  est évidemment, mesurable  $B$ , d'où il suit immédiatement que l'ensemble des valeurs  $\varphi$ , telles que  $w(e^{i\varphi})$  appartienne à l'ensemble  $F$ , est mesurable  $B$ , donc mesurable.

*l'image sur  $|z| = 1$  de l'ensemble  $F$  dans la construction ci-dessus soit un ensemble de mesure nulle, est que la capacité logarithmique de  $F$  soit nulle.*

Cette propriété met en évidence la liaison qui existe entre la notion de capacité et les mesures de MM. HÖSSJER et NEVANLINNA pour les points frontières d'une surface de RIEMANN du type considéré.<sup>17</sup>

**62. Type de la fonction de représentation.** — On peut en réalité déterminer un peu plus le type de la fonction de représentation  $w(z)$ . Si le point  $w = 0$  appartient à l'ensemble  $F$ ,  $w(z)$  ne s'annule pas dans  $|z| < 1$ ; elle est par conséquent une fonction de type  $A(z)$ . Au contraire, si  $w = 0$  appartient à l'ensemble complémentaire  $O - F$ , toute fonction de représentation est un produit de BLASCHKE, car aucune valeur limite n'est zéro (n° 58, théorème 2). Admettons ce cas, nous pouvons faire la représentation de manière que  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) > 0$ , alors  $w(z)$  s'écrit

$$w(z) = z \prod_k \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}.$$

*Les facteurs linéaires*

$$z, \frac{\overline{a_1}}{|a_1|} \frac{a_1 - z}{1 - \overline{a_1}z}, \frac{\overline{a_2}}{|a_2|} \frac{a_2 - z}{1 - \overline{a_2}z}, \dots$$

*figurant dans le produit, sont à des facteurs constants près les substitutions linéaires qui constituent le groupe automorphe laissant la fonction  $w(z)$  invariante. En effet, les points dans le cercle unité  $|z| < 1$  qui correspondent aux points superposés sur la surface  $W$ , sont tous équivalents l'un à l'autre par les substitutions du groupe. Ainsi, tous les zéros de  $w(z)$  sont équivalents l'un à l'autre de manière que le point  $z = 0$ , qui est un zéro pour  $w(z)$ , est transformé successivement en tous les points  $a_k$  par les substitutions du groupe. En outre, celles-ci transforment le cercle unité*

<sup>17</sup>G. HÖSSJER, Über funktionentheoretische Nullmengen und das Maximumprinzip bei mehrdeutigen analytischen Funktionen, *Comptes rendus du 8<sup>e</sup> congrès des math. scand. à Stockholm* (1934).

R. NEVANLINNA, Das harmonische Mass von Punktmengen und seine Anwendung in der Funktionentheorie, *ibid.*

$|z| < 1$  en lui-même, donc, elles sont toutes de la forme

$$e^{i\gamma_k} \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z} \quad (\gamma_k \text{ réel}).$$